

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**им. В.Ф. УТКИНА**

**М.А. БУРОБИН, М.В. ДУБКОВ, В.В. ИВАНОВ,**  
**В.В. ИНЯКОВ, Д.В. КИРЮШИН**

**ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ.**  
**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Рязань 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Рязанский государственный радиотехнический университет  
им. В.Ф. Уткина

М.А. БУРОБИН, М.В. ДУБКОВ, В.В. ИВАНОВ,  
В.В. ИНЯКОВ, Д.В. КИРЮШИН

# **ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Учебное пособие

*Рекомендовано научно-методическим советом  
ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радио-  
технический университет им. В.Ф. Уткина» в  
качестве учебного пособия для студентов очной  
и заочной форм обучения всех технических  
направлений (уровень 3, 5, квалификации «бака-  
лавр» и «специалист»), дисциплина «Физика», а  
также для направления 38.03.02 (уровень 3; ква-  
лификация «бакалавр»), дисциплина «Научные  
основы инновационных технологий».*

Рязань 2024

УДК 533.1

Законы сохранения в механике. Лабораторный практикум: учеб. пособие / М.А. Буробин, М.В. Дубков, В.В. Иванов, В.В. Иняков, Д.В. Кирюшин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т им. В.Ф. Уткина. Рязань, 2024. 80 с.

Рассмотрены основополагающие законы сохранения в механике. Приведено подробное описание вывода основных соотношений. Дано описание трёх лабораторных работ, включающее в себя метод эксперимента, порядок выполнения работ и итоговые контрольные вопросы.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки бакалавров и специальностей, изучающих дисциплины «Физика» и «Научные основы инновационных технологий».

Табл. 9. Ил. 22. Библиогр.: 4 назв.

*Законы сохранения, импульс, энергия, работа, момент импульса*

Рекомендовано научно-методическим советом Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензенты: А.А. Трубицын – д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры ПЭл ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина».

Т.Г. Авачёва – канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой математики, физики и медицинской информатики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный медицинский университет имени академика И.П. Павлова» Министерства здравоохранения Российской Федерации.

Б у р о б и н Михаил Анатольевич  
Д у б к о в Михаил Викторович  
И в а н о в Владимир Васильевич  
И н я к о в Валерий Викторович  
К и р ю ш и н Дмитрий Вячеславович

Законы сохранения в механике. Лабораторный практикум

Редактор Р.К. Мангутова  
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать XX.XX.24. Формат бумаги 60х84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,0.

Тираж 100 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

© Рязанский государственный  
радиотехнический университет  
им. В.Ф. Уткина, 2024

*Two things are infinite: the universe and human stupidity, and I'm not sure about the universe.*

*Albert Einstein*

## **1. Элементы теории. Законы сохранения**

### **1.1. Введение**

Законы сохранения – фундаментальные законы природы. В рамках механики в общем курсе физики изучаются три закона сохранения: импульса (или количества движения), момента импульса (или момента количества движения) и полной (суммарной кинетической и потенциальной) механической энергии. В соответствии с теоремой Эмми Нётер, представленной в 1918 году на семинаре Гёттингенского математического общества, они являются следствиями, вытекающими из непрерывных симметрий фундаментальных физических величин, определяющих динамику изолированных механических систем.

Для механической системы, свободной от внешних воздействий, то есть изолированной, рассматриваемой в рамках ньютоновской механики, инвариантность действий относительно произвольных сдвигов в пространстве означает сохранение полного импульса. Все точки изотропного пространства равноправны, и сдвиг системы отсчёта в этом пространстве не приводит к изменению физических законов природы. Иными словами, перенос системы отсчёта из одной точки в другую не приводит к изменению геометрической суммы векторов импульса тел механической системы. Инвариантность механической системы относительно вращений приводит к закону сохранения момента импульса. Инвариантность относительно сдвига во времени приводит к закону сохранения полной механической энергии.

Законы сохранения, рассматриваемые в механике, имеют всеобщий характер. Они применимы не только к механическим явлениям, но и ко всем явлениям природы, в частности они соблюдаются в релятивистской области и в мире элементарных частиц. Законы сохранения не зависят от природы и характера действующих сил. Поэтому с их помощью можно делать ряд важных заключений о поведении механических систем даже в тех случаях, когда силы остаются неизвестными.

## 1.2. Законы изменения и сохранения импульса

Механическая система – это совокупность тел, выделенных для рассмотрения. Тела системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. В соответствии с этим силы, действующие на объекты механической системы, можно подразделить на внутренние и внешние.

Внутренними называют силы, с которыми тела системы действуют друг на друга, внешними – силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе.

Механическая система, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой или изолированной. На практике замкнутыми также считают системы, в которых суммарное действие внешних сил скомпенсировано или силы взаимодействия внутри системы во много раз больше внешних.

Запишем второй закон Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где  $F$  – равнодействующая сила,  $d\vec{p}$  – элементарное изменение импульса за время  $dt$ .

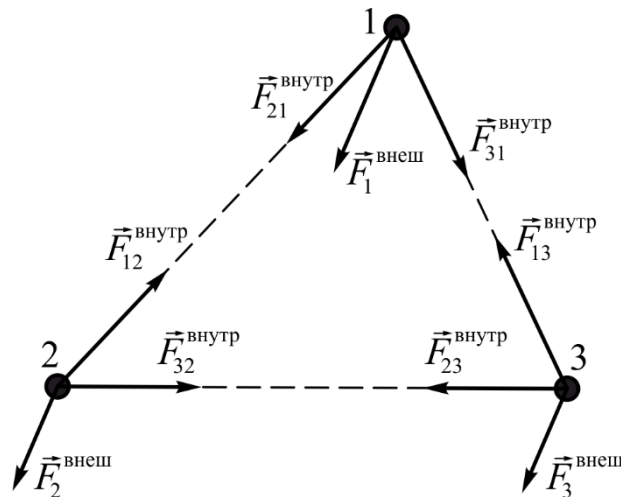


Рис. 1

На рис. 1 показан пример механической системы, состоящей из трёх материальных точек, которые взаимодействуют друг с другом внутри системы и с внешними телами или силовыми полями. В частности, на материальную точку 1 извне действует суммарная равнодействующая сила  $\vec{F}_1^{\text{внеш}}$ , а со стороны точек 2 и 3 – внутренние силы  $\vec{F}_{21}^{\text{внутр}}$  и  $\vec{F}_{31}^{\text{внутр}}$ .

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  материальных точек. На каждую  $i$ -ю материальную точку, согласно второму закону Ньютона, будет действовать сила:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik}^{\text{внутр}},$$

где  $\vec{F}_i^{\text{внеш}}$  – равнодействующая внешняя сила, действующая на  $i$ -ю материальную точку;  $\vec{F}_{ik}^{\text{внутр}}$  – внутренняя сила, действующая на  $i$ -ю материальную точку со стороны  $k$ -й точки.

Суммируя обе части уравнения по всем точкам, получаем

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik}^{\text{внутр}}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, внутренние силы взаимодействия  $i$ -й и  $k$ -й точек равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{ik}^{\text{внутр}} = -\vec{F}_{ki}^{\text{внутр}}.$$

Следовательно, сумма

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik}^{\text{внутр}} = 0.$$

Таким образом, скорость изменения полного импульса механической системы равна сумме равнодействующих внешних сил, действующих на тела этой системы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{внеш}},$$

где  $d\vec{p} = \sum_{i=1}^N d\vec{p}_i$  – суммарный импульс механической системы.

Помножив полученное соотношение на время  $dt$ , запишем закон изменения импульса механической системы:

Изменение количества движения (импульса) механической системы равно геометрической сумме импульсов равнодействующих внешних сил, действующих на тела этой системы:

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{внеш}} dt_i, \quad (1)$$

где  $\vec{F}_i^{\text{внеш}} dt_i$  – импульс равнодействующей внешних сил, действующей на  $i$ -ю материальную точку в течение времени  $dt_i$ .

Если система замкнута, то есть внешние силы не воздействуют на тела механической системы, то правая часть соотношения (1) равна нулю. Соответственно изменение импульса  $d\vec{p}$  равно нулю, и мы получаем закон сохранения импульса.

Суммарный импульс замкнутой (изолированной) системы материальных точек есть величина постоянная:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const.} \quad (2)$$

Закон сохранения импульса может применяться и для неизолированных механических систем в следующих случаях:

- 1) если действие внешних сил в рассматриваемый период времени скомпенсировано и их равнодействующая равна нулю;
- 2) при записи на направления, для которых проекция равнодействующей внешних сил равна нулю;
- 3) в случае если изменение импульса, вызываемые действием внешних сил в рассматриваемый период времени, пренебрежительно мало по сравнению с собственными импульсами тел, принадлежащих механической системе;

В основе закона сохранения импульса лежит изотропность (однородность) пространства, то есть одинаковость свойств пространства во всех точках. Параллельный перенос замкнутой системы из одного места в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механических свойств системы. Поведение системы на новом месте будет таким же, каким оно было на прежнем месте.

Рассмотрим приложение закона сохранения импульса к описанию поведения центра масс механической системы.

В однородном поле тяготения центр масс механической системы совпадает с её центром тяжести. Радиус-вектор центра масс  $\vec{r}_c$  любой системы материальных точек (рис. 2) можно определить, зная массу  $m_i$  и радиус-вектор  $\vec{r}_i$  каждой материальной точки на основе соотношения

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (3)$$

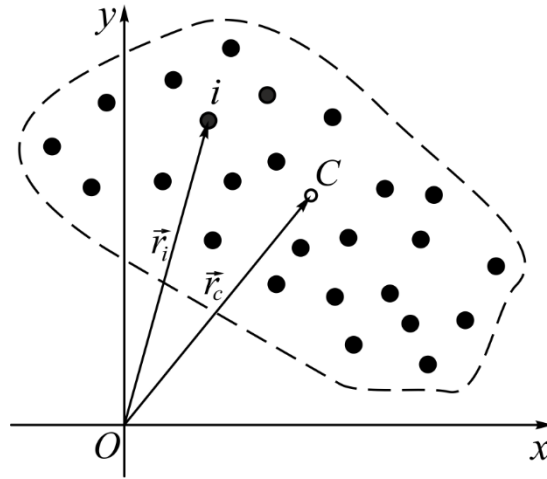


Рис. 2

где  $m = \sum_{i=1}^N m_i$  – общая масса системы материальных точек.

Продифференцировав выражение (3) по времени, определим скорость движения центра масс как

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i.$$

Если скорость центра масс равна нулю, то говорят, что система как единое целое покоится. Зная скорость центра масс, можно определить импульс центра масс:

$$\vec{p}_c = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = m \vec{v}_c.$$

Таким образом, закон изменения импульса можно записать следующим образом:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш}}. \quad (4)$$

Полученное соотношение является уравнением движения центра масс. Согласно этому уравнению, центр масс любой механической системы движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней были бы приложены все внешние силы. При этом ускорение центра масс не зависит от точек приложения внешних сил.

Для замкнутой механической системы

$$\frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0,$$

а значит, получаем ещё одну формулировку закона сохранения импульса.



Для замкнутой (изолированной) механической системы скорость центра масс есть величина постоянная:

$$\vec{v}_c = \text{const.} \quad (5)$$

При этом импульсы отдельных частей системы могут изменяться со временем, но приращение импульса одной части всегда равно убыли импульса оставшейся части. Другими словами, отдельные части изолированной системы могут только обмениваться импульсами.

### 1.3. Реактивное движение

Реактивное движение основано на третьем законе Ньютона, в соответствии с которым "сила действия равна по модулю и противоположна по направлению силе противодействия", и законе сохранения импульса. Например, горячие газы, вырываясь из сопла ракеты, образуют силу действия. Сила реакции, действующая в противоположном направлении, называется силой тяги  $F_T$ . Эта сила и обеспечивает ускорение ракеты.

Пусть начальная масса ракеты равна  $m$ , а её начальная скорость –  $v$ . Через некоторое время  $dt$  масса ракеты уменьшается на величину  $dm$  в результате сгорания топлива и выброса продуктов сгорания со скоростью истечения газов  $u$  в направлении, противоположном её движению. Это приводит к росту скорости ракеты на величину  $dv$ .

Применим закон сохранения импульса к системе "ракета + поток газа". Возьмём за основу идеализированную модель и будем считать систему замкнутой. В таком случае изменения суммарного импульса не будет. То есть

$$d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = 0. \quad (6)$$

Изменение импульса ракеты равно

$$d\vec{p}_1 = d(m\vec{v}) = m d\vec{v} + \vec{v} dm. \quad (7)$$

Изменение импульса отбрасываемых газов равно

$$d\vec{p}_2 = -(\vec{v} + \vec{u}) dm. \quad (8)$$

Знак «минус» появляется за счёт того, что газы движутся в противоположную сторону от направления движения ракеты.

Подставляя соотношения (7) и (8) в (6), получаем

$$m d\vec{v} + \vec{v} dm - (\vec{v} + \vec{u}) dm = 0.$$

Раскрываем скобки и упрощаем выражение

$$m d\vec{v} = \vec{u} dm. \quad (9)$$

Разделив на  $dt$  получаем

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt}.$$

Выражение, записанное слева, является силой тяги  $F_T$  ракеты. А выражение справа является произведением вектора скорости истечения газов  $\vec{u}$  и скорости расхода топлива  $dm/dt$ .

Таким образом, сила тяги пропорциональна скорости истечения газов и скорости расхода (сгорания) топлива:

$$\vec{F}_T = \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (10)$$

Соотношение (10) получило название уравнения реактивного движения. Ещё раз стоит отметить, что данное уравнение описывает идеализированный случай и не учитывает действие силы тяжести и аэродинамической силы.

Учёт действия внешних сил модифицирует соотношение (10) до уравнения Мещёрского (уравнение для материальной точки переменной массы, 1897 год):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_T + \vec{F}, \quad (11)$$

где  $\vec{F}$  – равнодействующая всех сторонних сил.

В том же 1897 году Константин Эдуардович Циолковский, взяв за основу соотношение (9) для «идеальных» условий, получил уравнение реактивного движения.

Проецируем соотношение (9) на направление движения ракеты и разделяем переменные:

$$dv = -u \frac{dm}{m}.$$

Интегрируем слева по скорости в пределах от начальной скорости  $v_0$  до текущей  $v$  и справа по массе ракеты от начальной  $m_0$  до текущей  $m$ :

$$\int_{v_0}^v dv = -u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m}$$

$$v|_{v_0}^v = -u \cdot \ln m|_{m_0}^m$$

$$v - v_0 = -u \cdot (\ln m - \ln m_0) = u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right).$$

Для ракеты массой  $m_p$ , имеющей на борту запас топлива массой  $m_t$  и стартующей из состояния покоя, принимая начальную скорость равной нулю ( $v_0 = 0$ ), получаем

$$v = u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) = u \ln \left( \frac{m_p + m_t}{m} \right), \quad (12)$$

где  $m_0$  – полная начальная масса ракеты вместе с запасом топлива.

Формула (12), полученная Циолковским, определяет скорость ракеты в зависимости от изменения её массы по мере сгорания топлива. С помощью этой формулы можно грубо оценить запас топлива, необходимый для достижения ракетой определённой скорости в идеальных условиях вакуума и отсутствия гравитационных полей.

Кроме того, формула (12) позволяет оценить максимально возможная скорость ракеты при выработке всего запаса топлива:

$$v_{\max} = u \ln \left( 1 + \frac{m_t}{m_p} \right). \quad (13)$$

#### ***1.4. Законы изменения и сохранения момента импульса***

Рассмотрим движение некоторой материальной точки  $A$ , обладающей импульсом  $\vec{p}$ , положение которой относительно некоторой неподвижной точки  $O$  выбранной инерциальной системы отсчёта задаётся радиусом-вектором  $\vec{r}$  (рис. 3,а). Тогда вектор  $\vec{L}$ , равный векторному произведению векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$ , называется моментом импульса частицы  $A$  относительно точки  $O$ :

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (14)$$

Направление вектора  $\vec{L}$  определяется по правилу правого винта: если вращать правый винт таким образом, чтобы его движение совпало с направлением вращения материальной точки, то поступательное перемещение острия винта укажет направление вектора  $\vec{L}$ .

Модуль вектора  $\vec{L}$  равен

$$L = pr \sin \varphi = pl,$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ , а  $l = r \sin \varphi$  – плечо вектора  $\vec{p}$  относительно точки  $O$ .

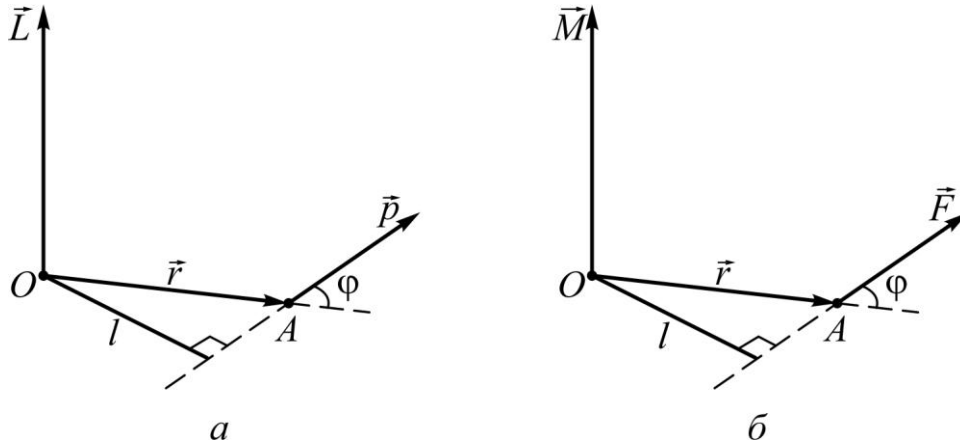


Рис. 3

С течением времени момент импульса может изменяться. Скорость изменения определяется как

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad (15)$$

Поскольку точка  $O$  неподвижна, то вектор  $d\vec{r}/dt$  равен скорости материальной точки  $\vec{v}$ , т.е.

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] = [\vec{v}, \vec{p}] = 0. \quad (16)$$

Для выбранной материальной точки по второму закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (17)$$

где  $\vec{F}$  – равнодействующая всех сил.

Следовательно, формула (15) с учётом (16) и (17) будет иметь вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (18)$$

Величина, стоящая в правой части этого уравнения, называется моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (19)$$

Модуль этого момента определяется как

$$M = Fr \sin \varphi = Fl, \quad (20)$$

где  $l = r \sin \varphi$  – плечо силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  (рис.3,б).

Таким образом, уравнение (18) можно записать как

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (21)$$

Момент импульса произвольного твёрдого тела можно рассматривать как векторную сумму моментов импульсов его отдельных частиц:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i. \quad (22)$$

Продифференцируем (22) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}.$$

Из формулы (21) следует, что эта производная равна моменту всех сил, действующих на  $i$ -ю частицу. В общем случае этот момент равен сумме моментов внутренних и внешних сил. Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i^{\text{внутр}} + \sum \vec{M}_i^{\text{внешн}},$$

где  $\sum \vec{M}_i^{\text{внутр}}$  – суммарный момент всех внутренних сил относительно точки  $O$ ,  $\sum \vec{M}_i^{\text{внешн}}$  – суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между частицами данной системы. По третьему закону Ньютона эти силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой, т.е. имеют одинаковое плечо. Поэтому моменты сил каждой пары взаимодействия равны по модулю и противоположны по направлению и, значит, суммарный момент всех внутренних сил всегда равен нулю. Тогда последнее уравнение будет иметь вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внешн}}, \quad (23)$$

где  $\vec{M}_{\text{внешн}} = \sum \vec{M}_i^{\text{внешн}}$  – суммарный момент всех внешних сил.

Проинтегрировав выражение (23), получим

$$\int_{L_0}^{L_k} d\vec{L} = \int_0^t \vec{M}_{\text{внешн}} dt \quad \text{или} \quad \vec{L}_k - \vec{L}_0 = \int_0^t \vec{M}_{\text{внешн}} dt, \quad (24)$$

где  $L_0$  и  $L_k$  – начальное и конечное значения момента импульса соответственно.

Величина в правой части уравнения (24) называется импульсом суммарного момента всех внешних сил.

Из полученного уравнения (24) следует, что момент импульса тела или системы тел сохраняется, т.е. его изменение равно нулю ( $\vec{L}_k - \vec{L}_0 = 0$ )

при любых взаимодействиях внутри данной системы, если импульс суммарного момента всех внешних сил равен нулю. Это возможно лишь в двух случаях:

- 1) если суммарный момент всех внешних сил равен нулю;
- 2) если мал промежуток времени  $dt$  действия момента сил ( $dt \rightarrow 0$ ).

Таким образом, закон изменения момента импульса можно сформулировать следующим образом:

изменение момента импульса механической системы тел относительно некоторой точки равно геометрической сумме моментов импульсов всех внешних сил относительно этой же точки, помноженных на время их действия:

$$d\vec{L} = \sum_i \vec{M}_i^{\text{внеш}} dt_i. \quad (25)$$

Закон сохранения момента импульса:

в замкнутой системе тел суммарный момент импульса остаётся постоянным:

$$\vec{L} = \text{const}. \quad (26)$$

При вращательном движении тела все его точки движутся в параллельных плоскостях и описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям этих окружностей. Эта прямая называется *осью вращения*.

Моментом импульса относительно неподвижной оси  $z$  называется величина  $L_z$ , равная проекции вектора  $\vec{L}$  на эту ось. Аналогично вводится понятие  $M_z$  момента силы относительно оси вращения как проекция вектора  $\vec{M}$  на эту ось.

Записав уравнение (23) в проекциях на ось  $z$ , получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{\text{внеш}z}. \quad (27)$$

Если  $r_i$  – расстояние от оси вращения до материальной точки, то момент импульса материальной точки относительно оси вращения  $z$  равен

$$L_{iz} = r_i p \sin \varphi = r_i p,$$

так как угол между вектором  $\vec{r}_i$  и вектором  $\vec{p}$  равен  $90^\circ$ .

Учитывая, что  $p = m_i v = m_i r_i \omega$ , получаем

$$L_{iz} = m_i r_i^2 \omega, \quad (28)$$

где  $m_i$  – масса материальной точки;  $\omega$  – ее угловая скорость.

Тогда момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения  $z$

$$L_z = \sum L_{iz} = \left( \sum m_i r_i^2 \right) \omega = I \omega, \quad (29)$$

где  $I = \sum m_i r_i^2$  – момент инерции твёрдого тела относительно оси  $Z$ .

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Для системы материальных точек момент инерции определяется по формуле

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й материальной точки;  $r_i$  – расстояние от материальной точки до оси вращения.

Для вычисления момента инерции протяжённого тела плотностью  $\rho$  его разбивают на элементарные объёмы  $dV$  массой  $dm$  и момент инерции тела определяют путём интегрирования по всему объёму:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV.$$

Подставим (29) в уравнение моментов (27). Если  $I = \text{const}$ , то

$$M_{\text{внешн}Z} = I \frac{d\omega}{dt} = I \varepsilon, \quad (30)$$

где  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  – модуль углового ускорения.

Уравнение (30) называется основным законом динамики вращательного движения твёрдого тела.

### 1.5. Работа силы и мощность

Сила воздействует на материальную точку. В результате действия силы точка перемещается. В качестве характеристики этого процесса вводится понятие работы силы.

При перемещении тела под действием постоянной силы работа – это скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы  $\vec{F}$  на вектор перемещения  $\Delta \vec{r}$ :

$$A = \vec{F} \Delta \vec{r} = F \Delta r \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между направлениями векторов силы и перемещения.

Для определения работы по перемещению тела под действием переменного вектора силы вводят понятие элементарной работы, равной скалярному произведению вектора силы на элементарное перемещение  $d\vec{r}$ :

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \varphi. \quad (31)$$

Обозначив проекцию силы на направление вектора перемещения как  $F_r = F \cos \varphi$  (рис. 4,а), перепишем выражение для элементарной работы в виде

$$dA = F_r dr.$$

Тогда полная работа при перемещении тела из точки 1 в точку 2 может быть определена путём интегрирования (суммирования) всех её элементарных составляющих (рис. 4,б):

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 F_r dr.$$

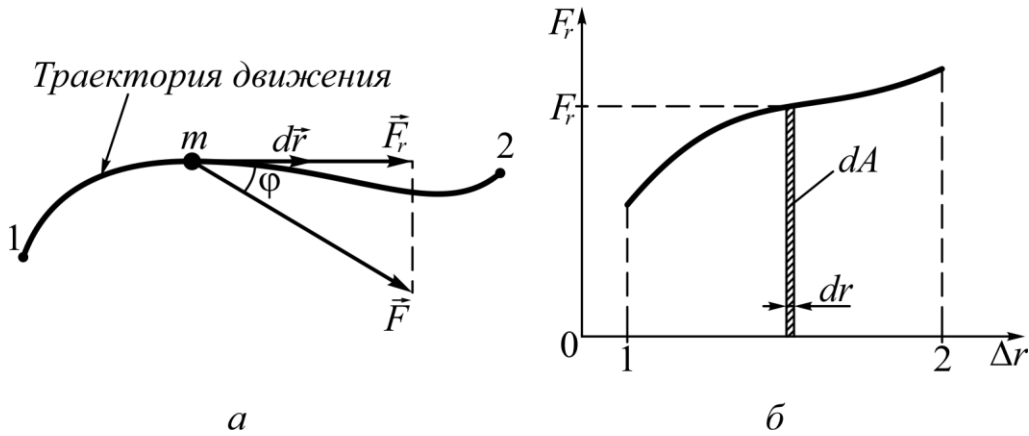


Рис. 4

Для вращательного движения тела соотношение (31) можно модифицировать. Вектор элементарного перемещения тела при повороте на элементарный угол  $d\varphi$  равен векторному произведению угла поворота и радиуса-вектора, проведённого от центра вращения к точке, в которой находится тело. То есть

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}].$$

Подставляя это в (31), получаем

$$dA = \vec{F} [d\vec{\varphi}, \vec{r}].$$

Преобразуем записанное, воспользовавшись свойством смешанного произведения векторов  $\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}] \cdot \vec{b}$ :

$$dA = [\vec{r}, \vec{F}] d\vec{\varphi}.$$

Заменяя полученное векторное произведение на момент силы в соответствии с соотношением (19), получаем

$$dA = \vec{M} d\vec{\varphi}. \quad (32)$$



Формула (32) задаёт элементарную работу по повороту тела на элементарный угол  $d\varphi$  относительно некоторой точки под действием момента  $M$  приложенной к этому телу силы, определяемого относительно той же точки.

В качестве характеристики скорости совершения работы вводят понятие мощности. Мгновенная мощность – это скалярная физическая величина, численно равная мгновенной скорости совершения работы:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (33)$$

Подставляя в определение мощности формулу элементарной работы, получаем соотношение для определения мощности как скалярное произведение векторов силы и мгновенной скорости:

$$N = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = Fv \cos \varphi, \quad (34)$$

где  $\varphi$  – угол между направлениями векторов силы и скорости.

### ***1.6. Консервативные и диссипативные силы***

Кроме контактных взаимодействий, возникающих между соприкасающимися телами, в природе существуют взаимодействия между удалёнными друг от друга телами. Примерами этого являются взаимодействия между Солнцем и планетами, планетами и их спутниками, планетами и поднятым над их поверхностью телами, взаимодействие между наэлектризованными телами. Подобные взаимодействия осуществляются посредством физических полей, которые представляют собой особую форму материи. Тела создают в окружающем их пространстве особое состояние, называемое силовым полем. Это поле проявляет себя в удалённом действии сил на другие тела. Например, в гравитационном поле, создаваемом Землёй, на тело массой  $m$  в каждой точке пространства вблизи поверхности Земли действует сила  $mg$ .

Если на тело в некотором пространстве действуют силы со стороны других тел, то говорят, что данное тело находится в поле силы. Если поле силы не изменяется со временем, то оно называется стационарным. Работа, которую совершают силовые поля по перемещению материальной точки или тела из одной точки пространства в другую, в общем случае зависит от пути между этими точками. Однако существуют силовые поля, работа в которых не зависит от пути, а определяется только начальным и

конечным положениями тела в пространстве. Поля таких сил называются потенциальными или консервативными, как, впрочем, и сами силы, действующие в этих полях. К таким силам в механике относятся сила гравитационного притяжения, производная от неё сила тяжести и сила упругой деформации.

Таким образом, потенциальными или консервативными силами называются силы, для которых работа по перемещению материальной точки из одного положения в другое не зависит ни от траектории движения, ни от скорости перемещения, а определяется только начальным и конечным положением этой материальной точки.

Следствием такого определения потенциальных сил является следующее утверждение. Работа потенциальных сил  $F_{\text{конс}}$  по любому замкнутому контуру  $L$  равна нулю:

$$\oint_L \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = 0. \quad (35)$$

Однако стоит отметить, что обратное утверждение не всегда является верным. То есть нельзя утверждать, что если работа силы равна нулю, то эта сила является потенциальной. Например, при движении тела по поверхности работа силы нормальной реакции опоры тоже обращается в нуль, так как угол между вектором силы реакции опоры и вектором перемещения в любой момент времени такого движения равен 90 градусов. Но это не означает, что сила нормальной реакции опоры является потенциальной (консервативной).

Особым случаем консервативных сил являются центральные силы. Эти силы зависят только от расстояния между взаимодействующими телами и направлены вдоль прямой, проходящей через их силовые центры. К ним относятся, в частности, силы гравитации и кулоновского взаимодействия.

Любую центральную силу можно представить в виде функции от расстояния до силового центра

$$F = F(r).$$

При этом элементарную работу этой силы на перемещении  $dr$  можно определить как

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F(r) dr.$$

Тогда работа этой силы на произвольном пути от точки 1 до точки 2 равна

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (36)$$

Выражение (36) зависит только от вида функции  $F(r)$  и от значений начального  $r_1$  и конечного  $r_2$  расстояний от силового центра до объекта воздействия, но не от пути, по которому перемещают объекты.

Другой класс сил – это так называемые диссипативные силы. К ним относятся сила трения, сила сопротивления среды и другие подобные силы.

Любая диссипативная сила является функцией скорости

$$\vec{F} = -k(v)\vec{v}, \quad (37)$$

где  $k(v)$  – положительный коэффициент, зависящий от скорости.

Знак минус в соотношении (37) указывает на то, что диссипативные силы всегда направлены против вектора скорости, то есть против направления движения тела.

В зависимости от выбора системы отсчёта работа таких сил может быть как положительной, так и отрицательной. Однако суммарная работа всех внутренних диссипативных сил всегда отрицательна вне зависимости от системы отсчёта:

$$A_{\text{дис}}^{\text{внутр}} < 0.$$

## 1.7. Энергия

Понятия энергии и работы широко используются в повседневной жизни. Эти понятия тесно связаны друг с другом. Работа совершается за счёт запаса энергии, и, наоборот, совершая работу, можно увеличить запас энергии в каком-либо устройстве. Например, совершая работу при заводе часов, мы создаём запас энергии в пружине, за счёт которого затем идут часы.

Энергия является общей количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи. Энергия не исчезает и не возникает из ничего; она может лишь переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления природы.

В соответствии с различными формами движения материи рассматривают различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и др. Механическая энергия подразделяется на кинетическую и потенциальную.

Кинетическая энергия или энергия движения определяется массами и скоростями рассматриваемых тел.

Потенциальная энергия или энергия положения зависит от взаимного расположения (от конфигурации) взаимодействующих друг с другом тел.

### ***1.7.1. Кинетическая энергия поступательного движения***

Пусть материальная точка массой  $m$  перемещается под действием силы  $F$ . Элементарная работа, совершаемая этой силой на элементарном перемещении  $dr$  в соответствии с определением (31),

$$dA = Fdr.$$

Запишем второй закон Ньютона

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Подставим его в формулу работы

$$dA = m \frac{dv}{dt} dr = m \frac{dr}{dt} dv = mv dv.$$

Внесём выражение справа под знак дифференциала функции

$$dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

и получим, что работа равна приращению некоторой величины, которая носит название кинетической энергии поступательного движения

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (38)$$

В таком случае элементарная работа равна элементарному приращению кинетической энергии:

$$dA = dE_k.$$

Интегрируя, получаем

$$A = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}. \quad (39)$$

Работа, совершаемая под действием внешней силы, при поступательном движении тела равна изменению его кинетической энергии.

### 1.7.2. Кинетическая энергия вращательного движения

Пусть тело, обладающее моментом инерции  $I$  относительно некоторой точки, вращается относительно неё под действием момента силы  $M$ . Элементарная работа, совершаемая этой силой при повороте на элементарный угол  $d\varphi$  в соответствии с соотношением (32), равна

$$dA = M d\varphi.$$

Запишем основной закон динамики вращательного движения (30)

$$M = I \frac{d\omega}{dt}$$

и подставим его в первую формулу для элементарной работы

$$dA = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi = I \frac{d\varphi}{dt} d\omega = I \omega d\omega.$$

Внесём выражение справа под дифференциал функции

$$dA = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$$

и получим, что работа равна приращению величины, равной  $I\omega^2/2$ , которая носит название кинетической энергии вращательного движения

$$E_{\kappa} = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (40)$$

Работа при вращательном движении тела, так же, как и при поступательном движении, равна изменению кинетической энергии

$$A = \Delta E_{\kappa} = E_{\kappa 2} - E_{\kappa 1}.$$

Кинетическая энергия обладает свойством аддитивности. Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех её составляющих:

$$E_{\kappa} = \sum_i E_{\kappa, i}$$

и является в общем случае суммой кинетических энергий поступательного и вращательного движений.

Движение механической системы удобно рассматривать в системе координат Кёнига, начало отсчёта которой совпадает с центром масс механической системы. Координатная система Кёнига упрощает расчёт полной кинетической энергии. Определив скорость  $v_c$  поступательного движения центра масс, суммарный момент инерции  $J_{\Sigma C}$  механической си-

системы относительно её центра масс и угловую скорость вращения  $\omega$  в соответствии с теоремой Кёнига, найти полную кинетическую энергию тела или системы тел в сложном движении как сумму энергии системы в поступательном движении и энергии системы во вращательном движении относительно центра масс:

$$E_{\kappa} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_{\Sigma C}\omega^2}{2}. \quad (41)$$

### 1.7.3. Связь силы и потенциальной энергии

Взаимодействие частицы с окружающими телами можно описывать двумя способами: с помощью сил или с помощью потенциальной энергии. Первый способ обладает большей общностью, так как применим и к таким силам, для которых нельзя ввести потенциальную энергию (например, к силам трения). Второй способ существенным образом упрощает анализ систем, но при этом ограничен областью действия потенциальных (консервативных) сил.

Представим себе стационарное поле потенциальных сил. Примем произвольную точку  $O$  за начало отсчёта и определим работу, совершаемую силами поля при движении материальной точки из начала отсчёта в произвольную точку. Так как работа будет определяться только положением конечной точки, то есть её радиусом-вектором  $\vec{r}$ , то можно ввести скалярную функцию  $E_n(r)$  такую, что в соответствии с (36)

$$A_{0-r} = \int_0^r F(r)dr = E_n(r).$$

Функцию  $E_n(r)$  называют потенциальной энергией материальной точки в поле потенциальных сил.

Найдём работу потенциальных сил при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2, задаваемых радиусами-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  соответственно. Так как работа не зависит от пути, то выберем путь, проходящий через начало отсчёта (точку  $O$ ), потенциал в котором примем равным нулю. Работа будет равна

$$A_{1-2} = A_{1-0} + A_{0-2}$$

или, с учётом  $A_{0-2} = -A_{2-0}$ ,

$$A_{1-2} = A_{1-0} - A_{2-0} = \int_0^{r_1} F(r)dr - \int_0^{r_2} F(r)dr = E_{n1} - E_{n2}.$$

То есть

$$A_{1-2} = -(E_{n2} - E_{n1}) = -\Delta E_n.$$

Таким образом, работа поля потенциальных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$A = -\Delta E_n. \quad (42)$$

В соответствии с (42) элементарную работу потенциальных сил можно определить как убыль элементарной потенциальной энергии

$$dA = -dE_n. \quad (43)$$

Приравняем выражения (31) и (43):

$$F_r dr = -dE_n,$$

где « $-dE_n$ » равно убыли потенциальной энергии в направлении вектора перемещения  $d\vec{r}$ .

Выразим силу:

$$F_r = -\frac{dE_n}{dr}. \quad (44)$$

Перемещение можно взять в любом направлении, в частности вдоль координатных осей декартовой системы координат:

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}.$$

Тогда в векторном виде

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k}. \quad (45)$$

В 1853 году Уильям Гамильтон для математического выражения суммы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  ввёл дифференциальный оператор, обозначив его символом перевёрнутой на 90 градусов против часовой стрелки греческой буквы дельта ( $\triangleleft$ ). В последующих работах других учёных символ был перевёрнут стрелкой вниз ( $\nabla$ ) и из-за своей формы получил название «набла». А сам оператор приобрёл названия оператора Гамильтона, оператора набла и гамильтониана. То есть

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

В нашем случае в оператор Гамильтона добавляются орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  декартовой системы координат, преобразуя его в векторный дифференциальный оператор вида

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Выражение (45), определяющее связь вектора силы и потенциальной энергии, записанное через оператор Гамильтона, принимает более компактный вид:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_n. \quad (46)$$

Применение векторного дифференциального оператора к скалярному полю преобразует его в векторное. Таким образом, домножая в соотношении (46) вектор набла на потенциальную энергию силового поля, мы получаем вектор силы, определяющий направленное силовое воздействие на тела в этом силовом поле, или так называемый градиент потенциальной энергии

$$\vec{F} = -\text{grad } E_n. \quad (47)$$

Соотношение (47) определяет связь вектора силы и потенциальной энергии.

#### ***1.7.4. Потенциальная энергия тела в поле силы гравитационного взаимодействия***

Согласно закону всемирного тяготения, сила гравитационного притяжения тел массами  $M$  и  $m$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, по модулю равна

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r,$$

где  $\vec{e}_r$  – орт радиуса-вектора  $\vec{r}$ , направленного от центра масс тела, создающего гравитационное поле, к центру масс тела, испытывающего силовое воздействие. Знак минус указывает на то, что направления вектора силы и радиус-вектора противоположны.

Соотношение (44) перепишем в виде

$$dE_n = -Fdr = G \frac{Mm}{r^2} dr.$$

Интегрируем полученное выражение:

$$E_n(r) = \int G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \int \frac{dr}{r^2} = -G \frac{Mm}{r} + \text{const.}$$



Определим постоянную интегрирования, приняв потенциальную энергию гравитационного взаимодействия на расстоянии, равном бесконечности, за нуль. Подставим в формулу значение  $r$ , равное бесконечности ( $\infty$ ), и приравняем энергию к нулю:

$$E_n(r \rightarrow \infty) = -G \frac{Mm}{\infty} + \text{const} = 0 \Rightarrow \text{const} = 0.$$

Тогда зависимость потенциальной энергии гравитационного взаимодействия от расстояния до силового центра принимает вид

$$E_n(r) = -G \frac{Mm}{r}.$$

### **1.7.5. Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести**

На тело массой  $m$  в поле силы тяжести действует сила, направленная к центру этого поля:

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Соотношение (44) перепишем в виде

$$dE_n = -Fdh = mgdh,$$

где  $h$  – высота, отсчитываемая по оси инерциальной системы отсчёта, направленной от силового центра поля тяжести.

Интегрируем полученное выражение для области с постоянным значением  $mg$ :

$$E_n(h) = \int mgdh = mg \int dh = mgh + \text{const}.$$

Определим постоянную интегрирования, приняв потенциальную энергию на нулевой высоте за нуль. Подставим в формулу значение  $h = 0$  и приравняем энергию к нулю:

$$E_n(h = 0) = mg \cdot 0 + \text{const} = 0 \Rightarrow \text{const} = 0.$$

Тогда зависимость потенциальной энергии в поле силы тяжести от высоты  $h$  принимает вид

$$E_n(h) = mgh. \quad (48)$$

Поскольку нулевой уровень потенциальной энергии можно выбирать произвольно, потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

### 1.7.6. Потенциальная энергия упруго деформированного тела

Рассмотрим вариант упругой деформации растяжения или сжатия на примере пружины. При растяжении на величину  $x$  на пружину действует возвращающая сила упругости

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x},$$

где  $k$  – коэффициент жёсткости пружины.

Соотношение (44) перепишем в виде

$$dE_n = -F_{\text{упр}} dx = kx dx.$$

Интегрируем полученное выражение

$$E_n(x) = \int kx dx = k \int x dx = \frac{kx^2}{2} + \text{const}.$$

Определим постоянную интегрирования, приняв потенциальную энергию недеформированной пружины за нуль. Подставим в формулу значение  $x = 0$  и приравняем энергию к нулю:

$$E_n(x=0) = \frac{k \cdot 0^2}{2} + \text{const} \Rightarrow \text{const} = 0.$$

Тогда зависимость потенциальной энергии упруго деформированного тела от величины деформации  $x$  принимает вид

$$E_n(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

### 1.8. Закон изменения и сохранения полной механической энергии

На тело, находящееся в стационарном поле, помимо потенциальных сил  $F_{\text{потен}}$  могут действовать и непотенциальные силы  $F_{\text{непотен}}$ . Тогда результирующая всех сил будет равна

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{потен}} + \vec{F}_{\text{непотен}}.$$

Работа этих сил идёт на приращение кинетической энергии тела

$$dE_k = dA_{\text{потен}} + dA_{\text{непотен}}.$$

Поскольку работа потенциальных сил совершается за счёт убыли потенциальной энергии (43)

$$dA_{\text{потен}} = -dE_n,$$

получаем

$$d(E_k + E_n) = dA_{\text{непотен}}.$$

Величину  $E_k + E_n$  называют полной механической энергией тела:

$$E = E_k + E_n. \quad (49)$$

Из двух последних уравнений следует, что элементарная работа всех непотенциальных сил, действующих на тело, равна элементарному приращению полной механической энергии тела:

$$dA_{\text{непотен}} = dE.$$

Избавляясь от дифференциалов, записываем закон изменения полной механической энергии системы.

Изменение полной механической энергии системы равно работе всех непотенциальных сил:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{всех непотен. сил}}, \quad (50)$$

где  $E_2$  — полная конечная механическая энергия системы,  $E_1$  — полная начальная механическая энергия системы.

При равенстве нулю работы всех непотенциальных сил получаем закон сохранения полной механической энергии системы.

Полная механическая энергия системы не изменяется, если работа всех непотенциальных сил в этой системе равна нулю:

$$E = E_k + E_n = \text{const}. \quad (51)$$

Следует отметить, что изменение энергии не означает её исчезновение. Энергия не исчезает и не появляется вновь, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи. Последнее относится и к тем физическим явлениям, на которые законы Ньютона не распространяются. Например, работа непотенциальной силы трения скольжения при движении тела по горизонтальной поверхности уменьшает полную механическую энергию тела, преобразуя её во внутреннюю энергию тела, поверхности, по которой тело движется, и окружающей среды, контактирующей с этими объектами.

## ***1.9. Примеры использования законов изменения и сохранения импульса и полной механической энергии***

### ***1.9.1. Прямой центральный абсолютно неупругий удар***

Два шара массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , сталкиваются. Удар прямой центральный абсолютно неупругий. Определить

скорость  $u$  шаров после столкновения и величину изменения полной механической энергии  $\Delta E$  в предположении, что потенциальная энергия при ударе остаётся неизменной.

Вариант 1. Оба шара до столкновения движутся навстречу друг другу. Допустим, начальный импульс первого шара больше импульса второго.

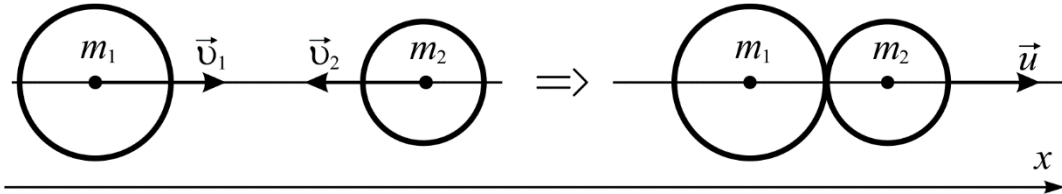


Рис. 5

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось  $x$  (рис. 5):

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Выразим скорость шаров после соударения

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Суммарная кинетическая энергия до соударения шаров равна

$$E_{K1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия после соударения

$$E_{K2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

Подставим скорость  $u$  в  $E_{K2}$ :

$$E_{K2} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \left[ \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right]^2 = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Определим изменение полной механической энергии  $\Delta E$ :

$$\begin{aligned} \Delta E = E_{K2} - E_{K1} &= \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2}{2(m_1 + m_2)} - \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{m_1 m_2 (v_2^2 + v_1^2 + 2v_1 v_2)}{2(m_1 + m_2)} = -\frac{m_1 m_2 (v_2 + v_1)^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Знак минус указывает на то, что полная механическая энергия системы снижается за счёт её частичного преобразования во внутреннюю энергию.

Результат:

- скорость шаров после соударения:  $u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ ;

- изменение полной кинетической энергии:  $\Delta E = -\frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{2(m_1 + m_2)}$ .

Формулу изменения полной кинетической энергии можно переписать как произведение приведённой массы шаров  $\mu$  на квадрат относительной скорости шаров до соударения  $v_{отн}$ , поделённое на два:

$$\Delta E = -\frac{\mu v_{отн}^2}{2},$$

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  и  $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ .

Вариант 2. Шары до столкновения движутся сонаправленно с разными скоростями.

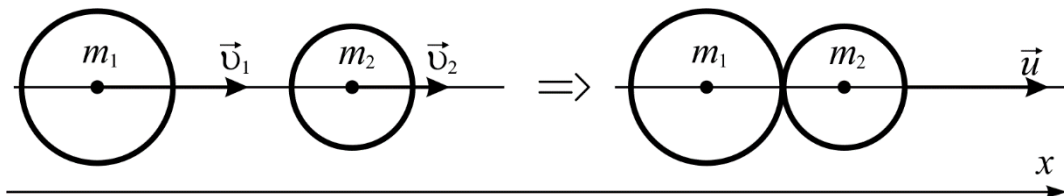


Рис. 6

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось  $x$  (рис. 6):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Выразим скорость шаров после соударения

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Суммарная кинетическая энергия до соударения шаров равна

$$E_{K1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия после соударения

$$E_{K2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Подставим скорость  $u$  в  $E_{K2}$ :

$$E_{K2} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \left[ \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right]^2 = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Определим изменение полной механической энергии  $\Delta E$ :

$$\begin{aligned} \Delta E = E_{K2} - E_{K1} &= \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2}{2(m_1 + m_2)} - \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{m_1 m_2 (v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2)}{2(m_1 + m_2)} = -\frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Знак минус указывает на то, что полная механическая энергия системы снижается за счёт её частичного преобразования во внутреннюю энергию.

Результат:

- скорость шаров после соударения:  $u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ ;

- изменение полной кинетической энергии:  $\Delta E = -\frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{2(m_1 + m_2)}$ .

Формулу изменения полной кинетической энергии можно переписать как произведение приведённой массы шаров  $\mu$  на квадрат относительной скорости шаров до соударения  $v_{отн}$  поделённое на два:

$$\Delta E = -\frac{\mu v_{отн}^2}{2},$$

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  и  $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ .

### 1.9.2. Прямой центральный абсолютно упругий удар

Два шара массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , сталкиваются. Удар прямой центральный абсолютно упругий. Определить скорости  $u_1$  и  $u_2$  шаров после столкновения. Потенциальная энергия при ударе остаётся неизменной.

Вариант 1. Оба шара до столкновения движутся навстречу друг другу. Допустим, начальный импульс первого шара больше импульса второго.

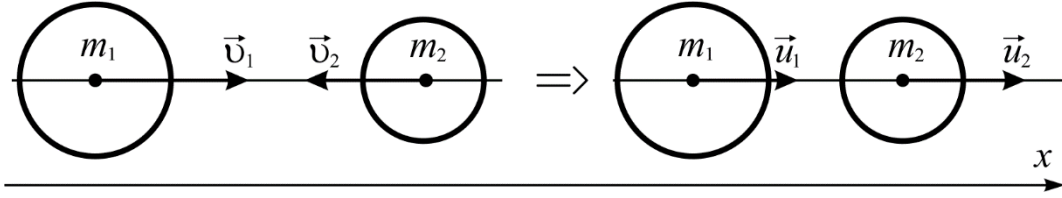


Рис. 7

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось  $x$  (рис. 7):

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Сокращая в законе сохранения энергии двойки в знаменателях, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \end{cases}$$

Перегруппируем уравнения, объединив слагаемые с массой  $m_1$  в левой части, а с массой  $m_2$  в правой:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 + v_2), \\ m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2). \end{cases}$$

Разложим разность квадратов во втором соотношении по известной формуле:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  и разделим второе уравнение на первое. Массы сокращаются, и мы получаем соотношение для скоростей

$$v_1 + u_1 = u_2 - v_2.$$

Выразим скорость второго шара после соударения

$$u_2 = v_1 + u_1 + v_2. \quad (52)$$

Подставляя её в первое уравнение системы, записываем

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (v_1 + u_1 + 2v_2).$$

Находим скорость первого шара после соударения

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Поставляя в формулу (52), приводим её к общему знаменателю и определяем скорость второго шара после соударения:

$$u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Результат:

- скорость первого шара после соударения:  $u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$

- скорость второго шара после соударения:  $u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$

Из полученных формул следует:

1) при одинаковых массах шаров ( $m_1 = m_2 = m$ ) получаем  $u_1 = -v_2$  и  $u_2 = v_1$ , то есть при прямом центральном абсолютно упругом ударе шаров с равными массами обмениваются скоростями;

2) если масса второго шара больше массы первого ( $m_1 < m_2$ ), то проекция скорости первого шара после соударения становится отрицательной, то есть он меняет направление движения на противоположное.

Вариант 2. Шары до столкновения движутся в одном направлении.

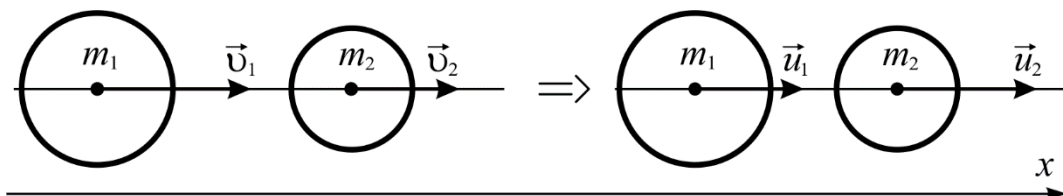


Рис. 8

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось  $x$  (рис. 8):

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Сокращая в законе сохранения энергии двойки в знаменателях, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2, \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2. \end{cases}$$



Перегруппируем уравнения, объединив слагаемые с массой  $m_1$  в левой части, а с массой  $m_2$  в правой:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2), \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2). \end{cases}$$

Разложим разность квадратов во втором соотношении по известной формуле:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  и разделим второе выражение на первое. Массы сокращаются, и мы получаем соотношение для скоростей:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2.$$

Выразим скорость второго шара после соударения:

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2. \quad (53)$$

Подставляя её в первое уравнение системы, записываем:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_1 + u_1 - 2v_2).$$

Находим скорость первого шара после соударения:

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя в формулу (53), приводим её к общему знаменателю и определяем скорость второго шара после соударения:

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Результат:

$$\text{- скорость первого шара после соударения: } u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2};$$

$$\text{- скорость второго шара после соударения: } u_2 = \frac{2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Если  $m_1 = m_2 = m$ , то  $u_1 = v_2$  и  $u_2 = v_1$ , то есть шары равной массой при прямом центральном абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

### ***1.9.3. Центральный абсолютно неупругий удар под углом***

Два шара массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , сталкиваются (рис. 9). Угол между векторами начальных скоростей в момент соударения равен  $\varphi$ . Удар центральный абсолютно неупругий. Определить скорость  $u$  шаров после столкновения и величину изменения полной

механической энергии  $\Delta E$  в предположении, что потенциальная энергия при ударе остаётся неизменной.

Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}.$$

С учётом теоремы косинусов из треугольника импульсов (рис. 9) в скалярном виде получаем:

$$[(m_1 + m_2)u]^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \varphi.$$

Выразим скорость шаров после соударения:

$$u = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \varphi}}{m_1 + m_2}.$$

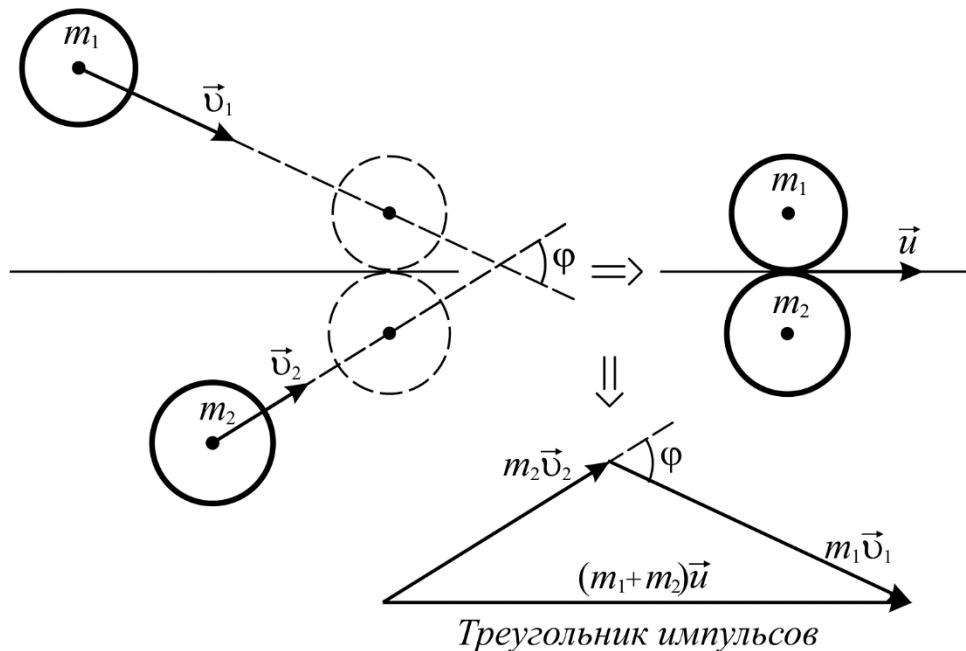


Рис. 9

Суммарная кинетическая энергия до соударения шаров равна

$$E_{K1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Кинетическая энергия после соударения

$$E_{K2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Подставим скорость  $u$  в  $E_{K2}$ :

$$E_{K2} = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \varphi}{2(m_1 + m_2)}.$$

Определим изменение полной механической энергии  $\Delta E$ :

$$\begin{aligned}\Delta E = E_{K2} - E_{K1} &= \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \varphi}{2(m_1 + m_2)} - \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) = \\ &= -\frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi)}{2(m_1 + m_2)}.\end{aligned}$$

Знак минус указывает на то, что полная механическая энергия системы снижается за счёт её частичного преобразования во внутреннюю энергию.

Результат:

- скорость шаров после соударения:

$$u = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos \varphi}}{m_1 + m_2};$$

- изменение полной кинетической энергии:

$$\Delta E = -\frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \varphi)}{2(m_1 + m_2)}.$$

Формулу изменения полной кинетической энергии можно переписать как произведение приведённой массы шаров  $\mu$  на квадрат относительной скорости шаров до соударения  $v_{отн}$ , поделённое на два:

$$\Delta E = -\frac{\mu v_{отн}^2}{2},$$

где  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  и  $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ .

#### ***1.9.4. Нецентральное абсолютно упругое соударение двух шаров, один из которых покоился***

Шар массой  $m_1$ , движущийся со скоростью  $v$ , сталкивается с покоящимся шаром массой  $m_2$  (рис.10). Угол между векторами скоростей шаров после абсолютно упругого непрямого соударения равен  $\varphi$ . Определить соотношения между углом разлёта шаров  $\varphi$  и их скоростями  $u_1$  и  $u_2$  после соударения. Потенциальная энергия при ударе остаётся неизменной.

Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2.$$

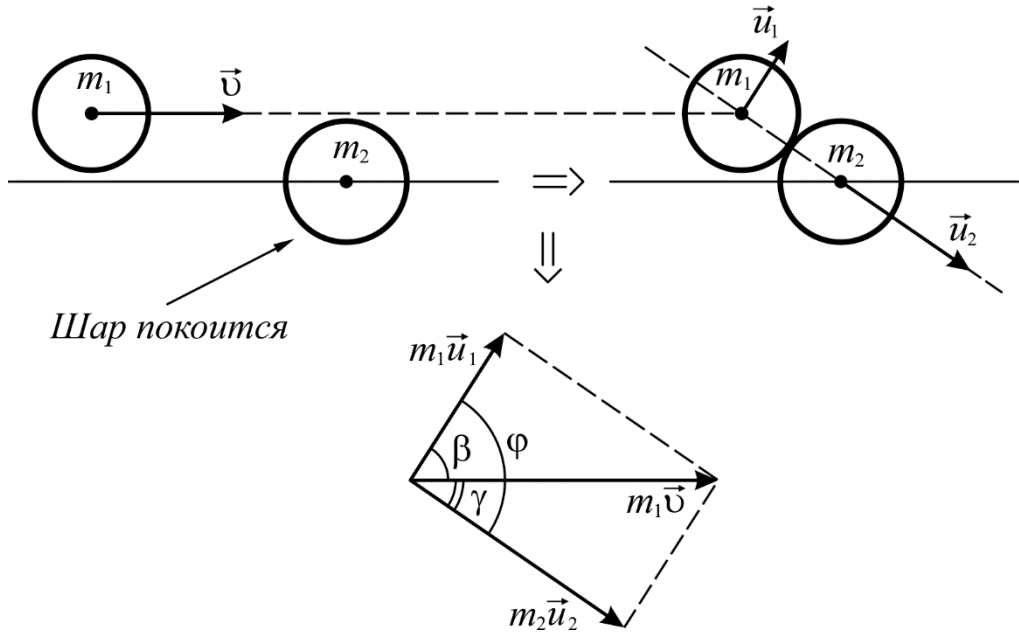


Рис. 10

С учётом теоремы косинусов из рисунка в скалярном виде получаем

$$(m_1 v)^2 = (m_1 u_1)^2 + (m_2 u_2)^2 + 2m_1 m_2 u_1 u_2 \cos \varphi.$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Сокращая в законе сохранения энергии двойки в знаменателях, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (m_1 v)^2 = (m_1 u_1)^2 + (m_2 u_2)^2 + 2m_1 m_2 u_1 u_2 \cos \varphi, \\ m_1 v^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \end{cases}$$

Перегруппируем уравнения, объединив слагаемые с массой  $m_1$  в левой части, а слагаемые с массой  $m_2$  оставив в правой:

$$\begin{cases} m_1^2 (v^2 - u_1^2) = (m_2 u_2)^2 + 2m_1 m_2 u_1 u_2 \cos \varphi, \\ m_1 (v^2 - u_1^2) = m_2 u_2^2. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$m_1 = m_2 + 2m_1 \frac{u_1}{u_2} \cos \varphi.$$

Найдём искомое соотношение, выразив косинус угла разлёта шаров:

$$\cos \varphi = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \cdot \frac{u_2}{u_1}. \quad (54)$$

Из формулы (54) следует, что при нецентрально абсолютно упругом столкновении двух шаров одинаковой массой ( $m_1 = m_2$ ), один из которых покоился, угол их разлёта равен 90 градусов и не зависит ни от величины начального импульса  $p = m_1 \cdot v$  налетающего шара, ни от угла  $\gamma$  между направлением этого импульса и прямой, соединяющей центры шаров в момент удара.

## **2. Лабораторный практикум**

### **Лабораторная работа 1-17**

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА**

**Цель работы:** экспериментальное определение моментов инерции сменных колец с помощью маятника Максвелла.

**Приборы и принадлежности:** установка с маятником Максвелла ФПМ-03, набор сменных колец.

#### **Элементы теории и метод эксперимента**

Механическая энергия системы – сумма кинетической и потенциальной энергий. Когда в системе действуют только консервативные силы, то её механическая энергия не изменяется со временем. Таким образом, выполняется закон сохранения механической энергии.

Маятник Максвелла наглядно демонстрирует закон сохранения механической энергии и, кроме того, с его помощью можно определить момент инерции тела. Изображение маятника Максвелла показано на рис. 11. На вертикальной стойке 1 основания 2 крепятся два кронштейна. Верхний кронштейн 3 снабжён электромагнитом 4 и устройством регулировки 5 бифилярного подвеса 6. Маятник представляет собой диск 7, закреплённый на стержне 8, подвешенном на бифилярном подвесе. На диске могут крепиться сменные кольца 9.

На нижнем кронштейне 10 закреплён фотоэлектрический датчик 11. Кронштейн обеспечивает возможность перемещения датчика вдоль вертикальной стойки. На стойке 1 нанесена миллиметровая шкала 12, по которой определяется ход  $h$  маятника. Фотодатчик выдаёт электрические сигналы на миллисекундомер 13. Основание расположено на четырёх регулировочных опорах 14, позволяющих устанавливать стойку 1 в вертикальное положение.

Маятник Максвелла работает по следующей схеме. Нити бифилярного подвеса тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску). С помощью электромагнитов маятник со сменными кольцами фиксируется в верхнем исходном положении. Потенциальная энергия маятника максимальна. Кинетическая равна нулю. После нажатия кнопки ПУСК и отключения электромагнита маятник начинает двигаться

вниз, испытывая воздействие силы тяжести и сил натяжения нитей. Реализуется преобразование запасённой потенциальной энергии в суммарную кинетическую энергию поступательного движения вниз и вращательного вокруг оси стержня.

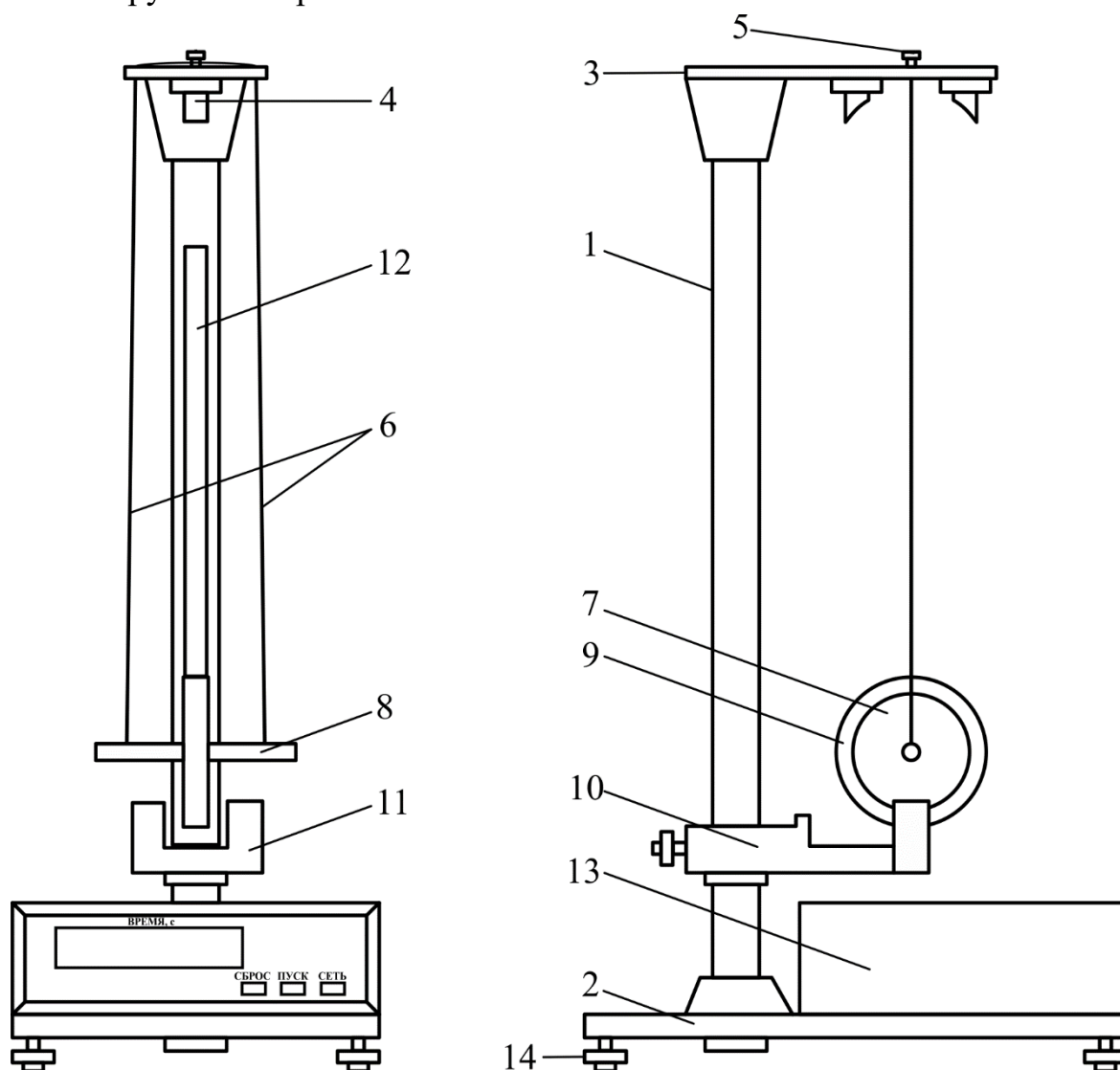


Рис. 11

В нижней точке подвеса вращение продолжается по инерции. В этом положении потенциальная энергия маятника обращается в нуль, а кинетическая достигает максимума. Нить теперь уже наматывается на стержень, и маятник начинает подъём вверх, сопровождаемый колебательным движением маятника в горизонтальном направлении. Достигнув верхней точки своего подъёма, маятник снова начинает опускаться, реализуя новый цикл. Визуально циклический характер движения устройства похож на работу пружинного маятника. Поэтому оно и получило название маятника Максвелла. Хотя, строго говоря, таковым не является.

Движение маятника Максвелла включает в себя три стадии: спуск, удар и подъем. На рисунке 12 схематически представлены временные зависимости проекций скорости  $v$  и ускорения оси маятника  $a$  на вертикальную направленную вниз ось инерциальной системы отсчёта, а также модуля силы натяжения нитей  $2T$ . В интервале времени от 0 до  $t_1$  наблюдается равномерный спуск, сопровождаемый линейным ростом скорости от 0 до  $v_1$ . В интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  реализуется удар. При этом скорость маятника меняет направление на противоположное, снижая своё значение по модулю до величины  $v_2$ . Проекция ускорения проваливается в область отрицательных значений, а сила натяжения нитей изменяется зеркально ускорению и на большей части данного интервала времени превышает значение силы тяжести, действующей на маятник. На последнем, третьем этапе движения маятника в интервале времени от  $t_2$  до  $t_3$  осуществляется его подъём, сопровождаемый линейным снижением скорости до нуля.

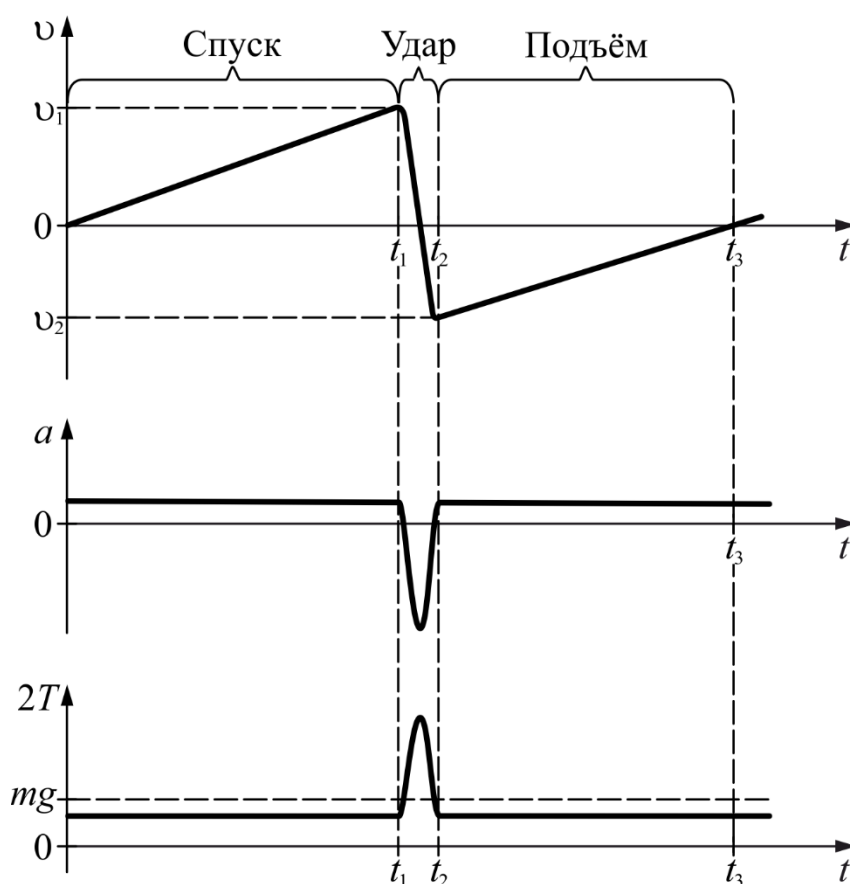


Рис. 12



Силы, действующие на маятник, могут быть условно разделены на силы длительного действия (при спуске и подъёме) и силы кратковременного действия (удар). Удар маятника в нижней точке отличается от удара тела при свободном его падении на горизонтально расположенное препятствие. В последнем случае кинетическая энергия падающего тела на первой стадии удара полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации. В противоположность этому при ударе маятника Максвелла в потенциальную энергию упругой деформации нитей по большей части переходит только кинетическая энергия поступательного движения. Кинетическая энергия вращательного движения, составляющая в момент, непосредственно предшествующий удару, большую часть от полной механической энергии системы, практически не изменяется.

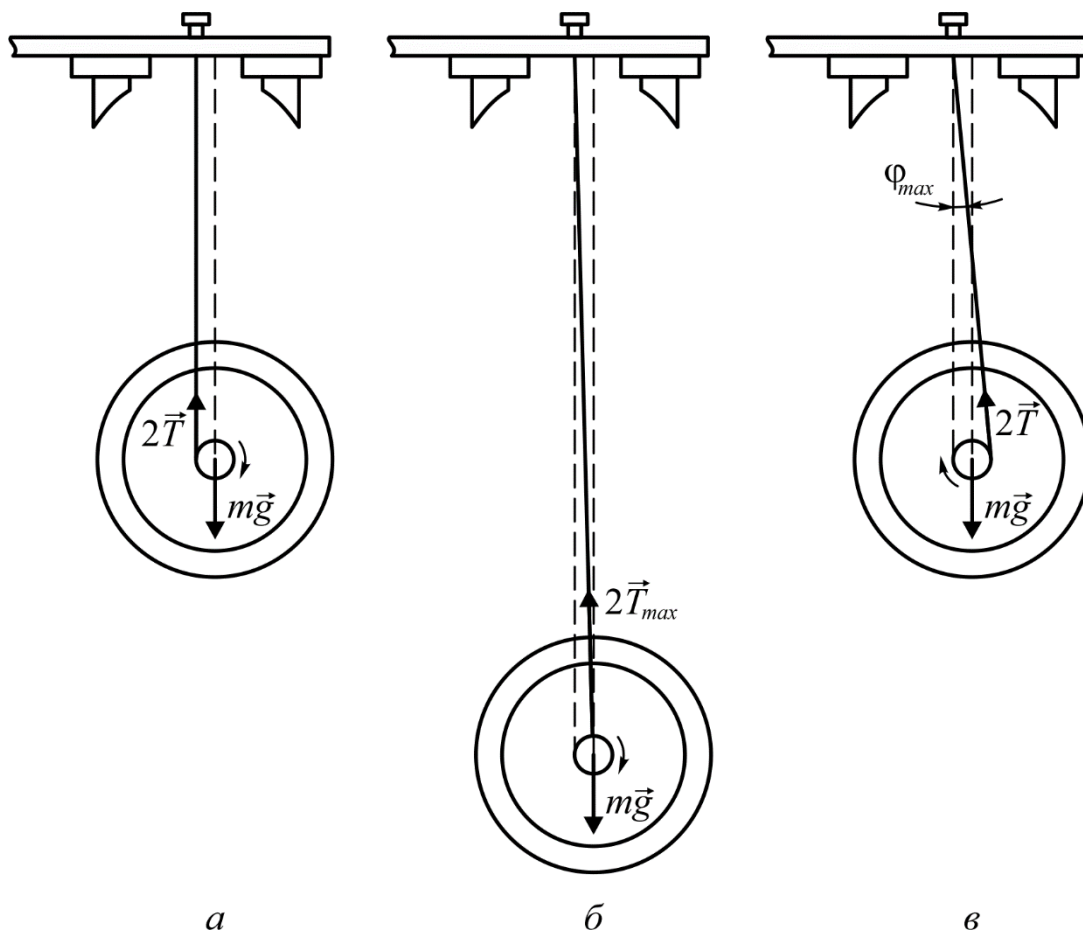


Рис. 13

Движение маятника происходит под действием двух сил: силы тяжести  $m\vec{g}$  и силы натяжения нитей  $2\vec{T}$ . Сила тяжести действует строго в вертикальном направлении. Поэтому устойчивое без раскачивания движение маятника возможно только в том случае, если и сила натяжения нитей

также направлена вертикально (рис. 13,а). В противном случае при отклонении нитей от вертикальной плоскости наличие горизонтальной составляющей силы приводит к возникновению дополнительных колебаний, подобных колебаниям математического маятника с переменным периодом в связи с изменением длины нитей в процессе вертикального движения маятника Максвелла. Такое явление наблюдается во время подъёма, когда при ударе в нижней точке нити выходят из вертикальной плоскости (рис. 13,б и в) и маятник, поднимаясь вверх, колеблется в поперечном направлении с угловой амплитудой порядка  $\varphi_{max}$ . Поэтому в данной работе измерение времени движения маятника, используемое для определения момента инерции сменных колец, осуществляется только на стадии спуска маятника Максвелла и не включает стадию удара.

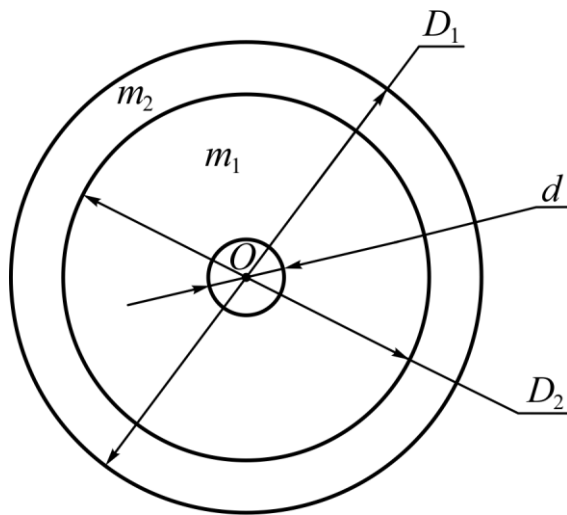


Рис. 14

Введём обозначения (рис. 14):  $m_1$  – масса стержня с насаженным на него диском;  $m_2$  – масса сменного кольца;  $d$  – диаметр стержня;  $D_1, D_2$  – внутренний и внешний диаметры сменных колец;  $I_1$  – момент инерции стержня с диском относительно оси, проходящей через центр инерции маятника перпендикулярно к плоскости диска;  $I$  – момент инерции сменного кольца относительно той же

оси;  $m_{\Sigma} = m + m_1$  – суммарная масса маятника со сменным кольцом;  $I_{\Sigma} = I + I_1$  – суммарный момент инерции маятника со сменным кольцом относительно оси  $O$ .

Наматывая нити подвеса на стержень, можно поднять маятник в верхнее положение до электромагнита (рис. 11). За начало отсчёта возьмём точку, совпадающую с фотодатчиком. Расстояние от фотодатчика до нижнего края сменного кольца, закреплённого на электромагните, обозначим как  $h$ . Когда маятник находится в верхнем положении, он обладает потенциальной энергией

$$E_n = m_{\Sigma}gh. \quad (55)$$

При раскручивании и опускании маятника происходит переход потенциальной энергии в кинетическую. Энергия маятника в нижнем положении определяется только кинетической энергией, которую можно записать в виде

$$E_k = \frac{m_\Sigma v^2}{2} + \frac{I_\Sigma \omega^2}{2}, \quad (56)$$

где  $v$  – скорость поступательного движения центра инерции маятника в момент времени, соответствующий пересечению нижним краем сменного кольца линии фотодатчика;  $\omega$  – угловая скорость вращения маятника в этот же момент времени.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$m_\Sigma gh = \frac{m_\Sigma v^2}{2} + \frac{I_\Sigma \omega^2}{2}. \quad (57)$$

Воспользовавшись соотношением  $v = \omega d/2$ , получим:

$$\frac{m_\Sigma gh}{v^2} = \frac{m_\Sigma}{2} + \frac{2I_\Sigma}{d^2}. \quad (58)$$

Если маятник опустился на расстояние  $h$  за время  $t$ , то из кинематических уравнений, записанных для случая равноускоренного движения, следует, что

$$v^2 = \frac{4h^2}{t^2}. \quad (59)$$

Подставляя (59) в (58), определяем суммарный момент инерции маятника:

$$I_\Sigma = \frac{m_\Sigma d^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (60)$$

Поскольку моменты инерции системы тел подчиняются правилу аддитивности, т. е.  $I_\Sigma = I + I_1$ , то окончательно момент инерции сменного кольца

$$I = \frac{m_\Sigma d^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right) - I_1. \quad (61)$$

Формулу (61) можно получить также, используя закон движения центра масс и основной закон динамики вращательного движения:

$$\begin{cases} m_\Sigma a = m_\Sigma g - 2T, \\ 2T \frac{d}{2} = I_\Sigma \varepsilon, \end{cases} \quad (62)$$

где  $T$  – сила натяжения подвеса;  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника;  $a$  – ускорение центра масс маятника ( $a = \varepsilon d/2$ ).

Решая систему (62) относительно  $I_\Sigma$ , получаем:

$$I_\Sigma = \frac{m_\Sigma d^2}{4} \left( \frac{g}{a} - 1 \right). \quad (63)$$

Выразив ускорение  $a$  через пройденное расстояние  $h$  и время  $t$ :

$$a = \frac{2h}{t^2},$$

подставив его в (63) и воспользовавшись принципом аддитивности моментов инерции, получим выражение для  $I$ , совпадающее с (61).

Таким образом, измеряя время  $t$  прохождения маятником расстояния  $h$  и зная момент инерции маятника  $I_1$ , можно найти момент инерции  $I$  сменного кольца.

### ***Порядок выполнения работы***

1. Убедитесь в вертикальном положении стойки 1 (рис. 11) и при необходимости произведите регулировку положения основания с помощью регулировочных опор 14.

2. Закрепите на диске 7 маятника одно из сменных колец 9.

3. Проследите, чтобы стержень 8 находился в горизонтальном положении. Добиться этого можно с помощью устройства регулировки 5 библиографического подвеса 6.

4. Установите кронштейн 10 с фотодатчиком 11 в нижней части шкалы миллиметровой линейки таким образом, чтобы диск с закреплённым на нем кольцом при движении проходил посередине рабочего окна фотодатчика и не ударялся о кронштейн в нижнем положении.

5. Нажмите кнопку СЕТЬ, расположенную на лицевой панели электронного блока. При этом должен загореться цифровой индикатор миллисекундомера. Прогрейте установку в течение 2 – 3 минут.

6. Вращая маятник, равномерно наматывайте обе нити на стержень виток к витку от края стержня к центру (рис. 15). Подняв маятник в верхнее положение, зафиксируйте его с помощью электромагнитов. В зафиксированном положении нити должны быть слегка ослаблены.

7. Запишите значения величины  $h$  хода маятника, массы маятника Максвелла без учёта сменных колец  $m_1$ , момента инерции стержня с диском  $I_1$  и занесите в табл. 1 массу  $m_2$  сменного кольца.

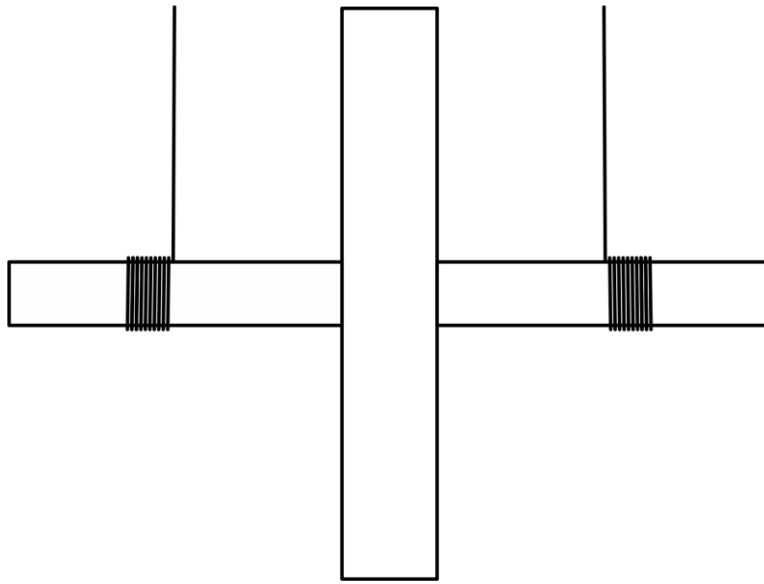


Рис. 15

**Примечание.** Величина  $h$  определяется как расстояние от нижнего края сменного кольца, находящегося в верхнем положении, до плоскости нижнего кронштейна (фотодатчика). Значения массы  $m_1$  и момента инерции  $I_1$  приведены на установке.

8. Нажмите на кнопку СБРОС.

9. Нажмите кнопку ПУСК, при этом электромагниты обесточиваются, маятник начинает раскручиваться, миллисекундомер начинает отсчёт времени, а в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика счёт времени прекращается (маятник Максвелла при этом продолжает совершать колебания).

10. Проведите 10 измерений интервала времени  $t$ . Результаты занесите в табл. 1.

Таблица 1

Величина хода маятника:  $h =$

Масса маятника без сменного кольца:  $m_1 =$

Момент инерции маятника без сменного кольца:  $I_1 =$

$m_2$ , кг	№ опыта	1	2	...	10	$\langle t \rangle$ , с
	$t$ , с					
	$t$ , с					
	$t$ , с					

11. Повторите измерения для двух других сменных колец. Результаты занесите в табл. 1.

12. Для каждой из проведённых серий измерений времени  $t$  вычислите среднее значение  $\langle t \rangle$ .

13. Возьмите штангенциркуль. Запишите его цену деления  $C$  и произведите пять замеров диаметра  $d$  стержня 8 в областях, на которые производилась намотка нити подвеса. Результаты занесите в табл. 2.

14. Произведите пять замеров внешнего диаметра  $D_1$  диска 7 при различных его положениях. Результаты занесите в табл. 2.

15. Надев на диск 7 одно из сменных колец 9, произведите пять замеров внешнего диаметра  $D_2$  этого кольца при различных его положениях. Результаты занесите в табл. 2.

Таблица 2

Цена деления штангенциркуля:  $C =$  мм

№	$d, \text{мм}$	$(\langle d \rangle - d_i)^2$	$D_1, \text{мм}$	$(\langle D_1 \rangle - D_{1,i})^2$	$D_2, \text{мм}$	$(\langle D_2 \rangle - D_{2,i})^2$
1						
2						
3						
4						
5						
	$\langle d \rangle$	$\sum (\langle d \rangle - d_i)^2$	$\langle D_1 \rangle$	$\sum (\langle D_1 \rangle - D_{1,i})^2$	$\langle D_2 \rangle$	$\sum (\langle D_2 \rangle - D_{2,i})^2$

16. Заполните табл. 2, рассчитав средние значения измеренных величин  $\langle d \rangle$ ,  $\langle D_1 \rangle$ ,  $\langle D_2 \rangle$ , квадраты их отклонений от средних значений и суммы квадратов их отклонений.

17. Оцените погрешность диаметра стержня:

а) рассчитайте величину систематической составляющей погрешности измерений для доверительной вероятности  $P = 0,95$  по формуле

$$\Delta_C = 1,1 \cdot \frac{C}{2},$$

где  $C$  – цена деления штангенциркуля;

б) рассчитайте величину случайной составляющей погрешности

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle d \rangle - d_i)^2},$$

где  $n = 5$  – число измерений;  $t_c = 2,776$  – коэффициент Стьюдента, взятый из таблицы коэффициентов при числе измерений  $n = 5$  и доверительной вероятности  $P = 0,95$ ;  $\sum_{i=1}^n (\langle d \rangle - d_i)^2$  – сумма квадратов отклонений диаметра стержня, взятая из табл. 2;

в) оцените значение абсолютной погрешности как среднеквадратичную сумму её систематической и случайной составляющих

$$\Delta d = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2}.$$

18. Оцените погрешность внешнего диаметра диска:

а) рассчитайте величину случайной составляющей погрешности

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle D_1 \rangle - D_{1,i})^2},$$

где  $\sum_{i=1}^n (\langle D_1 \rangle - D_{1,i})^2$  – сумма квадратов отклонений внешнего диаметра диска, взятая из табл. 2;

б) оцените значение абсолютной погрешности

$$\Delta D_1 = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2}.$$

19. Оцените погрешность внешнего диаметра съёмных колец:

а) рассчитайте величину случайной составляющей погрешности

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle D_2 \rangle - D_{2,i})^2},$$

где  $\sum_{i=1}^n (\langle D_2 \rangle - D_{2,i})^2$  – сумма квадратов отклонений внешнего диаметра сменного кольца, взятая из табл. 2;

б) оцените значение абсолютной погрешности

$$\Delta D_2 = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2}.$$

20. Запишите полученные результаты в виде:

$$d = \langle d \rangle \pm \Delta d \text{ [мм]}, \quad P = 0,95$$

$$D_1 = \langle D_1 \rangle \pm \Delta D_1 \text{ [мм]}, \quad P = 0,95$$

$$D_2 = \langle D_2 \rangle \pm \Delta D_2 \text{ [мм]}, \quad P = 0,95$$

21. Вычислите моменты инерции сменных колец  $I$  маятника Максвелла по формуле (61). Для каждого из колец расчёт производится один раз по средним значениям. Ускорение свободного падения  $g$  принять равным  $9,8145 \text{ м/с}^2$ .

22. Оцените погрешности моментов инерции для каждого из сменных колец:

а) рассчитайте величину систематической составляющей погрешности времени для доверительной вероятности  $P=0,95$  по формуле

$$\Delta_C = 1,1 \cdot \frac{C}{2},$$

где  $C$  – цена деления миллисекундомера, равная цене деления его последнего разряда;

б) рассчитайте величину случайной составляющей погрешности

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle t \rangle - t_i)^2},$$

где  $n = 10$  – число измерений;  $\langle t \rangle$  – среднее арифметическое значение времени, взятое из табл. 1 для соответствующего сменного кольца;  $t_i$  – значение времени в  $i$ -м измерении;  $t_c = 2,262$  – коэффициент Стьюдента, взятый из таблицы коэффициентов при числе измерений  $n = 10$  и доверительной вероятности  $P = 0,95$ ;

в) оцените значение абсолютной погрешности

$$\Delta t = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2};$$

г) запишите результат в виде:  $t = \langle t \rangle \pm \Delta t \text{ (с)}, P = 0,95$ ;

д) оцените абсолютные погрешности моментов инерции сменных колец по упрощённой формуле:

$$\Delta I = (I + I_1) \sqrt{\left(\frac{\Delta m_\Sigma}{m_\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{\langle d \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\langle t \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} + \Delta I_1,$$

где  $\Delta m_\Sigma = 1,1 \cdot (C_{m1} + C_{m2}) / 2 = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$  – абсолютная погрешность суммарной массы  $m_\Sigma = m_1 + m_2$ , определяемая как сумма систематических погрешностей слагаемых частей  $m_1$  и  $m_2$  (в данной работе  $C_{m1} = C_{m2} = 1 \text{ г}$ );  $\Delta h = 1,1 \cdot C_h / 2 = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  – абсолютная погрешность высоты  $h$  при цене деления шкалы  $C_h = 1 \text{ мм}$ ;  $\Delta I_1$  – абсолютная погрешность момента инерции маятника без сменных колец (указана на установке);



е) оцените абсолютные погрешности моментов инерции сменных колец, поделив значения их абсолютных погрешностей на сами моменты инерции:

$$\delta_I = \frac{\Delta I}{I}.$$

23. Запишите результаты в виде табл. 3.

Таблица 3

Масса кольца, кг	Момент инерции экспериментальный
	$I_{\text{экс}} = I \pm \Delta I \left[ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \right], \delta_I = \dots\%, P = 0,95$
	$I_{\text{экс}} = I \pm \Delta I \left[ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \right], \delta_I = \dots\%, P = 0,95$
	$I_{\text{экс}} = I \pm \Delta I \left[ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \right], \delta_I = \dots\%, P = 0,95$

24. Рассчитайте теоретические значения моментов инерции сменных колец относительно оси вращения по формуле

$$I_{\text{теор}} = \frac{m_2}{8} (D_1^2 + D_2^2).$$

25. Для каждого из сменных колец оцените погрешность моментов инерции:

а) оцените значение абсолютной погрешности в соответствии с формулой

$$\Delta I_{\text{теор}} = I_{\text{теор}} \sqrt{\left( \frac{\Delta m_{\Sigma}}{m_{\Sigma}} \right)^2 + \frac{(\Delta D_1 + \Delta D_2)^2}{D_1^2 + D_2^2}};$$

б) оцените значение относительной погрешности

$$\delta_{I_{\text{теор}}} = \frac{\Delta I_{\text{теор}}}{I_{\text{теор}}}.$$

26. Запишите результаты в виде табл. 4.

Таблица 4

Масса кольца, кг	Момент инерции экспериментальный
	$I_{\text{теор}} = I_{\text{теор}} \pm \Delta I_{\text{теор}} \left[ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \right], \delta_{I_{\text{теор}}} = \dots\%, P = 0,95$
	$I_{\text{теор}} = I_{\text{теор}} \pm \Delta I_{\text{теор}} \left[ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \right], \delta_{I_{\text{теор}}} = \dots\%, P = 0,95$
	$I_{\text{теор}} = I_{\text{теор}} \pm \Delta I_{\text{теор}} \left[ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \right], \delta_{I_{\text{теор}}} = \dots\%, P = 0,95$

27. Заполните итоговую табл. 5 результатов.

Таблица 5

$m_2, \text{кг}$	$I_{\text{эксп}}, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$I_{\text{теор}}, \text{кг}\cdot\text{м}^2$

28. Сформулируйте вывод о проделанной работе, отразив в нем **все полученные** результаты.

### **Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
2. Что такое момент инерции материальной точки, тела?
3. Что представляет собой маятник Максвелла?
4. Почему при измерении времени движения маятника Максвелла нельзя допускать его раскачивание в горизонтальной плоскости.
5. Что такое угловая и линейная скорости, угловое и линейное ускорения? Какова их взаимосвязь?
6. Получите соотношение для кинетической энергии вращающегося тела.
7. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.
8. Выведите формулу для определения момента инерции диска, относительно оси вращения, проходящей через центр масс.
9. Выведите формулы для определения момента инерции кольца и тонкого кольца (обруча) относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

## *Лабораторная работа 1-18*

### **ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОГО И НЕУПРУГОГО УДАРОВ ШАРОВ**

**Цель работы:** изучение законов сохранения импульса и механической энергии на примере ударного взаимодействия двух шаров; определение средней силы удара, коэффициента восстановления скорости и энергии деформации шаров.

**Приборы и принадлежности:** установка для изучения упругого и неупругого ударов шаров ФПМ-08.

#### *Элементы теории и метод эксперимента*

Ударом или соударением называется столкновение двух или нескольких тел, при котором их взаимодействие длится очень короткое время. При этом их кинетическая энергия полностью или частично переходит в потенциальную энергию деформации и во внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры.

Мерой механического взаимодействия тел при ударе вместо ударной силы  $\vec{F}$  служит её импульс за время удара, т.е. величина

$$\int_0^t \vec{F} dt = \langle \vec{F} \rangle t, \quad (64)$$

где  $\langle \vec{F} \rangle$  – средняя сила удара;  $t$  – время ударного взаимодействия.

Если импульс за время  $t$  удара изменяется на конечную величину  $\Delta(m\vec{v})$ , то из второго закона динамики следует, что

$$\langle \vec{F} \rangle t = \Delta(m\vec{v}). \quad (65)$$

Измеряя время ударного взаимодействия, можно на основании (65) определить среднюю силу удара  $\langle F \rangle$  по формуле

$$\langle F \rangle = \frac{m_1 \Delta v_1}{t} = \frac{m_2 \Delta v_2}{t}, \quad (66)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы взаимодействующих тел;  $\Delta v_1$  и  $\Delta v_2$  – изменения их скоростей при ударе.

Существуют два предельных вида удара: **абсолютно упругий** и **абсолютно неупругий**. **Абсолютно упругим** называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические,

виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются законами сохранения импульса и энергии. Эти законы можно сформулировать так: полный импульс и полная механическая энергия замкнутой системы остаются неизменными. Система называется замкнутой, если она не отдаёт своей энергии и не получает её извне.

**Абсолютно неупругий** удар характеризуется тем, что потенциальная энергия деформации не возникает. Кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию. После удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При таком ударе выполняется лишь закон сохранения импульса. Закон сохранения механической энергии не соблюдается (большая часть кинетической энергии тел переходит при этом в тепло).

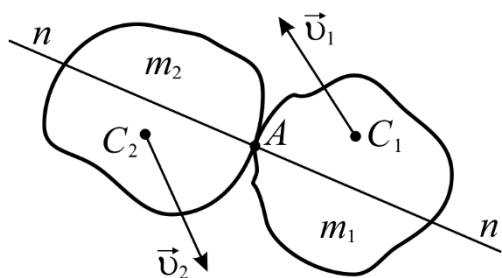


Рис. 16

При изучении столкновения двух тел обычно рассматривают прямой центральный удар. Уточним понятия «прямой» и «центральный» применительно к удару.

Общая нормаль  $nn$  к поверхностям соударяющихся тел (рис. 16) в точке  $A$  их соприкосновения называется

**линией удара**. Удар называется **прямым**, если скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  центров масс  $C_1$  и  $C_2$  соударяющихся тел перед ударом параллельны линии удара. В противном случае удар называется **косым** (рис. 16). Удар называется **центральный**, если при ударе центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

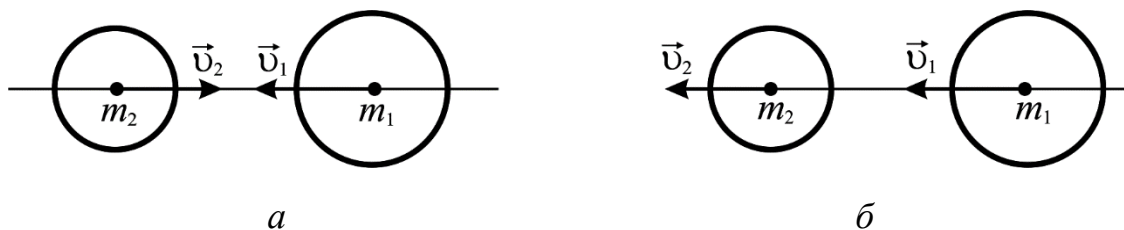


Рис. 17

В качестве примера рассмотрим центральный удар двух шаров. Такой удар может произойти, если: 1) шары движутся навстречу друг другу (рис. 17,а) и 2) один из шаров догоняет другой (рис. 17,б).

Будем считать, что шары образуют замкнутую систему или что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга. Тогда на основании законов сохранения импульса и энергии в случае абсолютно упругого удара шаров будем иметь

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (67)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \quad (68)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы шаров;  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  – их скорости до и после взаимодействия.

Из уравнений (67) и (68) находим скорости шаров  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  после столкновения:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (69)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1) \vec{v}_2 + 2m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (70)$$

Мы рассмотрели крайний случай – абсолютно упругий удар. В действительности кинетическая энергия тел после соударения становится меньше их первоначальной энергии на величину

$$\Delta E_\kappa = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - K_c^2), \quad (71)$$

где  $K_c$  – так называемый коэффициент восстановления скорости. Эта часть механической (кинетической) энергии тел при ударе преобразуется в их внутреннюю энергию.

Коэффициент восстановления  $K_c$  определяется отношением абсолютных значений относительных скоростей тел после и до удара, т.е.

$$K_c = \frac{|u_2 - u_1|}{|v_2 - v_1|}, \quad (72)$$

и зависит от физических свойств материала, формы и масс соударяющихся тел.

**Примечание.** В общем случае (косой удар, рис. 16) коэффициент восстановления скорости определяется по формуле

$$K_C = \frac{|u_{2n} - u_{1n}|}{|v_{2n} - v_{1n}|},$$

где  $v_{1n}$ ,  $v_{2n}$ ,  $u_{1n}$  и  $u_{2n}$  – проекции скоростей двух тел на линию удара до и после их взаимодействия.

Итак, если при ударном взаимодействии потери кинетической энергии нет, т.е.  $K_C = 1$ , то удар называется абсолютно упругим, соответственно при  $K_C = 0$  – абсолютно неупругим.

«Потерю» кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе можно найти по формуле (71), положив в ней  $K_C = 0$ , или непосредственно с помощью законов сохранения импульса и полной механической энергии, применив их к указанному виду взаимодействия:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}, \quad (73)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + \Delta E_\kappa. \quad (74)$$

Из соотношения (74) выражаем изменение кинетической энергии как разность суммарной кинетической энергии шаров до и после столкновения:

$$\Delta E_\kappa = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}. \quad (75)$$

Выразив из закона сохранения импульса (73) скорость шаров после столкновения и подставив её в (75), после несложных преобразований получим

$$\Delta E_\kappa = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}. \quad (76)$$

Если начальная скорость второго шара до столкновения равна нулю ( $v_2 = 0$ ), то соотношения (75) и (76) принимают вид:

$$\Delta E_\kappa = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} \quad (77)$$

и

$$\Delta E_\kappa = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (78)$$

## Экспериментальная часть

Работа выполняется на специализированной установке, приведённой на рис. 18. Установка представляет собой настольный прибор, выполненный на едином основании 1 с регулируемыми опорами 3. На вертикальной стойке 2 закреплены верхний 5 и нижний 6 кронштейны. На верхнем кронштейне находится винтовой механизм 7 изменения межцентрового расстояния шаров, приводимый в движение ручкой 8 и фиксируемый гайкой 9.

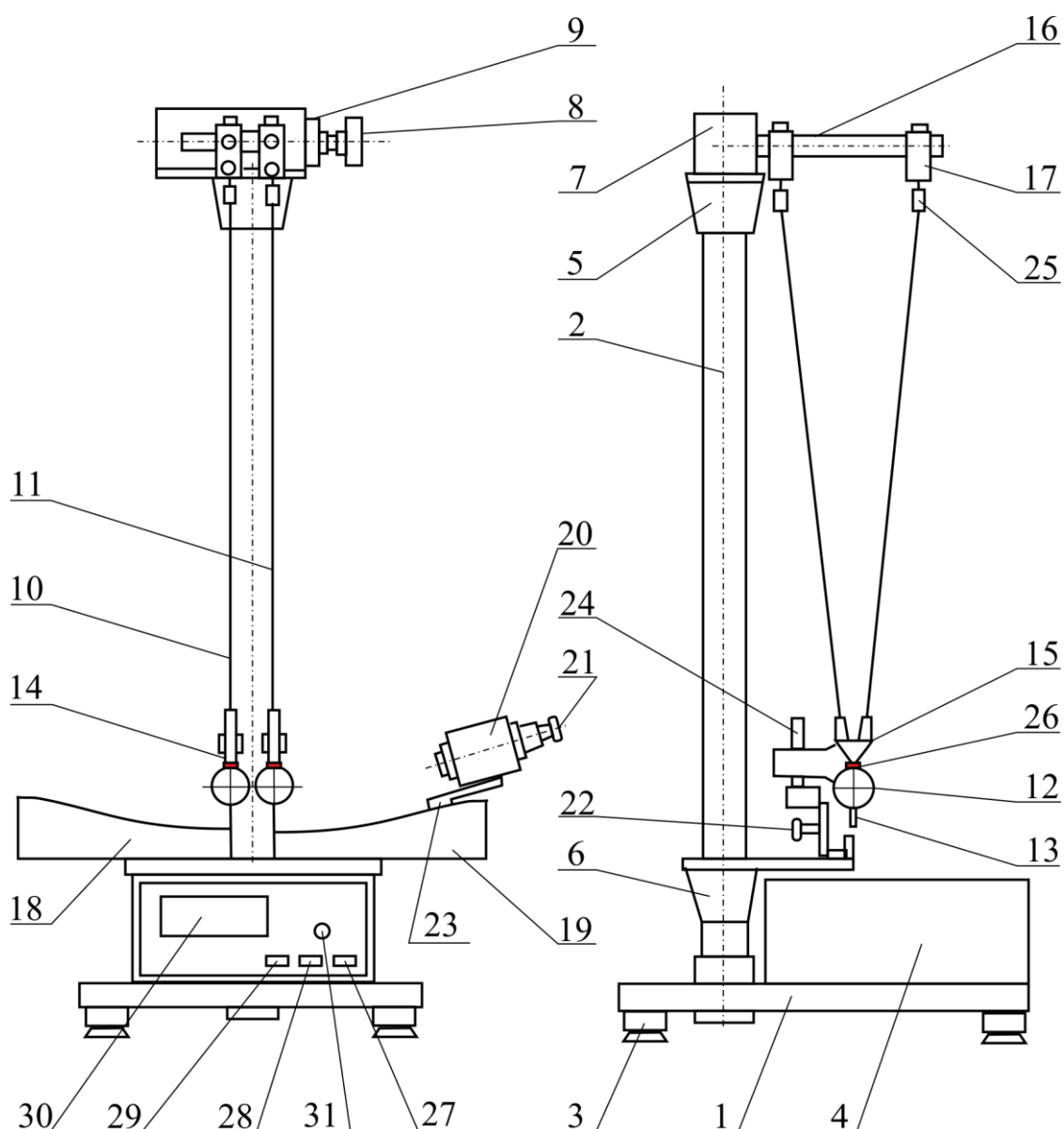


Рис. 18

Маятник левый 10 и маятник правый 11 состоят из металлического со специальной накладкой для неупругого удара шара 12 с нониусом 13,

закреплённого с помощью крючка 14, траверсы 15 и токоведущих бифилярных подвесов на штанге 16. Для уменьшения трения бифилярный подвес крепится на штанге с помощью призмных опор 17. С помощью винтового механизма 7 осуществляется изменение межцентрового расстояния за счёт перемещения штанги левого маятника, что используется при установке шаров разного диаметра.

На нижнем кронштейне закреплены левая 18 и правая 19 шкалы, каждая из которых может перемещаться в определённых пределах по плите кронштейна при установке нониуса шара на 0 и фиксироваться в выбранном положении с помощью винтов. Правая шкала служит для определения угла бросания и углов отскока правого шара, левая – для определения углов отскока левого шара. Углы отскока шаров определяются после их первого соударения.

На правой шкале крепится электромагнит 20 с регулируемым усилием. Регулировка усилия осуществляется винтом 21. Электромагнит может перемещаться вдоль шкалы и фиксироваться гайкой 22 в выбранном положении. Конструкция кронштейна 23 крепления электромагнита предусматривает также возможность его перемещения по вертикали вдоль стержня 24 и вокруг него. Электромагнит служит для удержания правого шара в выбранном положении.

Бифилярный подвес снабжён зажимным устройством 25, с помощью которого осуществляются регулировка и фиксация выбранной длины нити подвеса. Каждый шар снабжён устройством винт-гайка 26, посредством которого можно в небольших пределах (5-8 мм) менять положение шара по вертикали за счёт изменения положения крючка 14.

На общем основании 1 крепится микросекундомер физический 4, предназначенный для замера времени соударения металлических шаров и для питания электромагнита 20. На передней панели микросекундомера находятся кнопки СЕТЬ 27, СБРОС 28, ПУСК 29, индикаторная панель времени 30 и сигнальная лампочка ПЕРЕПОЛНЕНИЕ 31. Включение электромагнита происходит одновременно с нажатием кнопки включения сети 27. Нажатием кнопки пуска 29 осуществляется обесточивание электромагнита. Микросекундомер фиксирует время только одного (первого) соударения.

В работе используются металлические шары, изготовленные из стали и бронзы, испытывающие при столкновении не вполне упругий удар.



Правый шар (П) отводится в крайнее правое положение  $A$  на угол  $\alpha_0$  (рис. 19,а), фиксируется электромагнитом 20 (рис. 18) и освобождается при нажатии кнопки ПУСК. Левый, изначально покоившийся, шар (Л) после соударения отклоняется от вертикали  $OO_2$  до крайнего левого положения  $B$ , соответствующего углу  $\alpha_2$  (рис. 19,б).

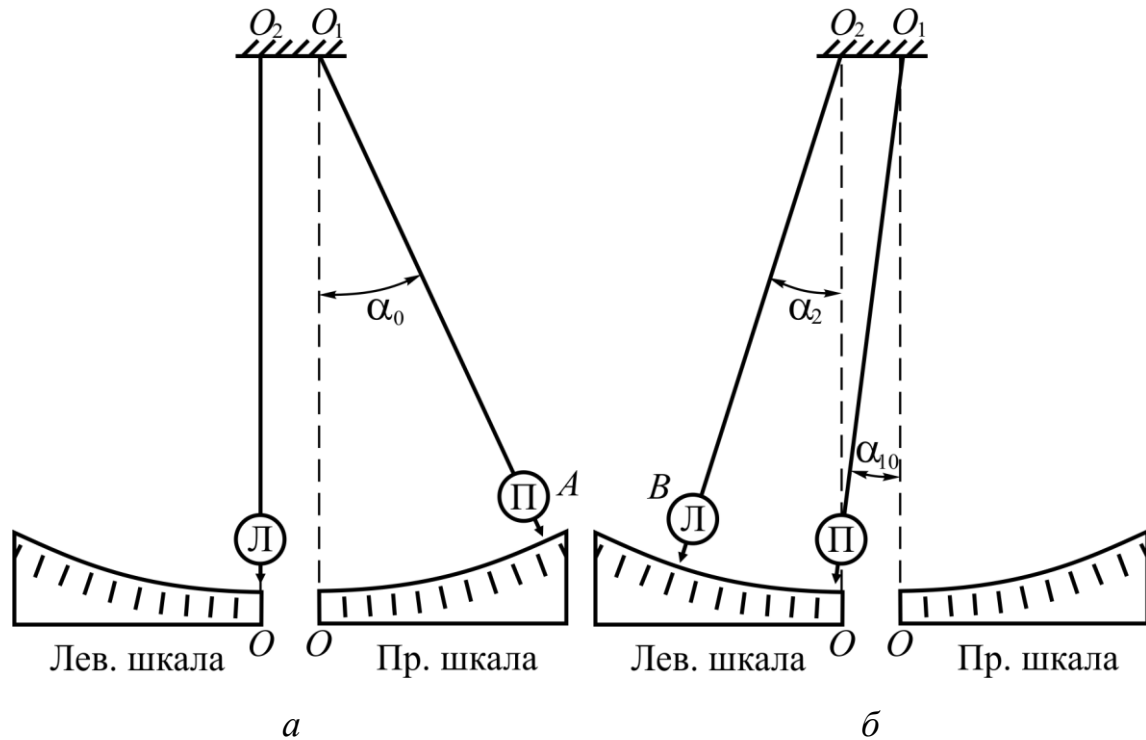


Рис. 19

Массы шаров примерно равны, поэтому правый шар, будь он немного тяжелее или легче левого, после первого столкновения не изменяет направление своего движения, продолжая двигаться влево, и отклоняется от вертикали  $OO_1$  (рис. 19,б) на некоторый угол  $\alpha_{10}$ , который, по сути, является углом «отскока» правого шара. Однако измерить значение этого угла по левой шкале нельзя (получим неверный отсчёт угла), по правой – невозможно (не то направление).

Обойти эту трудность можно, если левый шар после первого отскока остановить (скажем, рукой) в положении  $B$  (рис. 20,а). Тогда угол «отскока» правого шара  $\alpha_1$  можно определить и по правой шкале, измерив начальную амплитуду его колебаний

$$\alpha_1 = \alpha_{10} \approx \alpha_{11}.$$

Итак, подчеркнём ещё раз, что угол «отскока»  $\alpha_1$  правого шара определяется начальной амплитудой его колебаний, измеренной после первого отскока левого шара и удержания его в положении  $B$ .

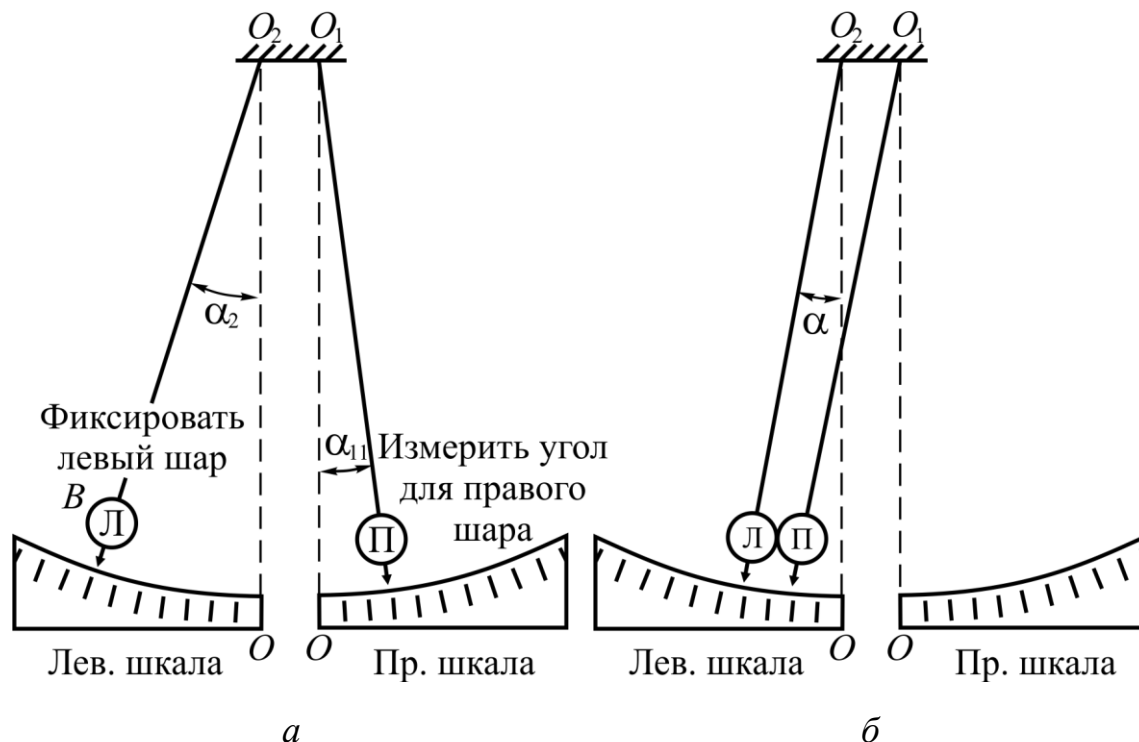


Рис. 20

В случае проведения эксперимента с реализацией неупругого взаимодействия шаров (рис. 20,б) угол  $\alpha$ , определяемый по максимальному отклонению левого шара от вертикали  $OO_2$  непосредственно после их соударения, позволяет найти высоту подъёма обоих шаров и, следовательно, оценить их полную механическую энергию.

Принцип действия установки основан на изучении удара как совокупности явлений, возникающих при кратковременном взаимодействии тел, на примере соударения двух шаров, закреплённых на бифилярных подвесах.

Если положение экспериментальной установки отрегулировано должным образом, то при соударении шаров их импульсы направлены перпендикулярно к силовым линиям поля тяжести. Следовательно, в момент удара проекции внешних сил, действующих на рассматриваемую механическую систему, равны нулю. Тогда применительно к соударяющимся шарам, один из которых (левый) изначально покоился, можно записать закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось

инерциальной системы отсчёта, связанной с землёй и направленной в сторону начального движения правого шара, в следующем виде:

для упругого удара

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (79)$$

для абсолютно неупругого удара

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u, \quad (80)$$

где  $m_1$  – масса правого шара;  $m_2$  – масса левого шара;  $\vec{v}_1$  – скорость правого шара до удара;  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  – скорости шаров после упругого удара;  $\vec{u}$  – общая скорость шаров после абсолютно неупругого удара.

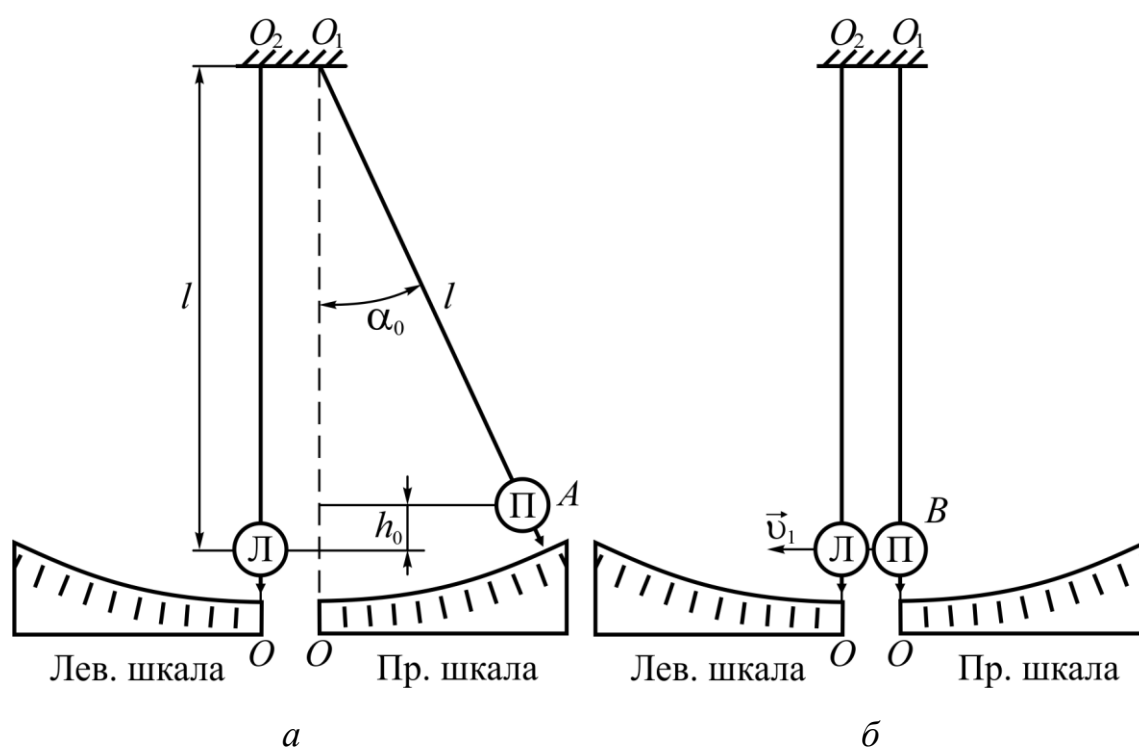


Рис. 21

Скорость правого шара в момент удара о левый можно определить на основе значения его угла первоначального отклонения  $\alpha_0$ . В процессе движения шара из точки  $A$  (рис. 21,а) в точку  $B$  (рис. 21,б) на него могут действовать только две непотенциальные силы: сила сопротивления среды (воздуха) и сила натяжения нити. Сопротивлением среды мы пренебрегаем с учётом реальной точности наших измерений, малых значений скоростей движения шаров, их массы и формы. Работа силы натяжения нити в процессе движения шара оказывается тоже равной нулю, так как в процессе движения в любой момент времени направление вектора перемещения перпендикулярно к вектору силы натяжения нити. Таким обра-

зом, работа всех непотенциальных сил равна нулю, и мы можем для определения искомой скорости записать закон сохранения энергии, приравняв начальную потенциальную энергию шара в точке  $A$  к его кинетической энергии поступательного движения в точке  $B$ :

$$m_1 g h_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (81)$$

При описании движения шара ввиду относительной малости его габаритных размеров по отношению к длине подвеса мы используем модель материальной точки и, следовательно, в соотношении не учитываем кинетическую энергию вращательного движения. Конкретно для данной экспериментальной установки такой подход является оправданным. Например, для стального шара массой 112 г при длине подвеса  $l = 0,47$  м доля кинетической энергии вращательного движения не превышает 0,11 % от величины полной кинетической энергии.

Начальную высоту в точке  $A$  (рис. 21,а) можно определить как

$$h_0 = l(1 - \cos \alpha_0)$$

или с учётом тригонометрического тождества  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$  –

$$h_0 = 2l \sin^2 \left( \frac{\alpha_0}{2} \right). \quad (82)$$

Подставляя соотношение (82) в (81) и сокращая массу, получаем формулу для определения скорости правого шара перед ударом:

$$v_1 = 2\sqrt{gl} \sin \left( \frac{\alpha_0}{2} \right). \quad (83)$$

Аналогично получаем формулы для оценки начальных скоростей движения шаров после упругого и неупругого ударов:

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin \left( \frac{\alpha_1}{2} \right), \quad (84)$$

$$u_2 = 2\sqrt{gl} \sin \left( \frac{\alpha_2}{2} \right), \quad (85)$$

$$u = 2\sqrt{gl} \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right), \quad (86)$$

где  $l$  – расстояние от точки подвеса до центра тяжести шаров;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы отскока соответствующих шаров при упругом ударе;  $\alpha$  – угол отклонения центра масс шаров при неупругом ударе. Длина подвеса шаров  $l = 470 \pm 10$  мм. Массы шаров в граммах указаны на самих шарах.

### Подготовка установки к работе

При подготовке установки к работе сделайте следующие операции.

1. Расположите установку на лабораторном столе и добейтесь устойчивого положения её основания с помощью регулировочных опор, используя в качестве отвеса бифилярные подвесы маятников.

2. Ручкой 8 установите необходимое межцентровое расстояние, шары при этом должны слегка касаться друг друга.

3. С помощью подвесов 10 и 11 установите шары в такое положение, чтобы их нониусы 13 находились в одной вертикальной плоскости со шкалами 18 и 19, при этом риски на шарах, находящихся в состоянии покоя, должны быть на одном уровне.

4. Установите положение электромагнита 20 по высоте таким образом, чтобы его ось совпадала с рисккой подведённого к нему правого шара и угол бросания  $\alpha_0$  шара (рис. 19) лежал в пределах  $10-15^\circ$ .

5. Включите в сеть шнур питания микросекундомера 4.

6. Нажмите кнопку СЕТЬ, расположенную на лицевой панели микросекундомера, при этом должны загореться лампочки цифровой индикации.

7. Отклоните правый шар до соприкосновения с электромагнитом, при этом должно произойти «залипание» шара.

8. Нажмите на кнопку СБРОС, при этом на лампочках цифровой индикации должны загореться нули.

9. Нажмите на кнопку ПУСК, при этом должен обесточиться электромагнит, произойдёт удар шаров, и на цифровом индикаторе микросекундомера должно зафиксироваться время соударения (лампочка ПЕРЕПОЛНЕНИЕ гореть не должна). Удар должен быть прямым и центральным, т.е. траектории отскока шаров должны находиться в одной вертикальной плоскости.

### *Порядок выполнения работы*

1. Определите и запишите в отчёт перед табл. 6 угол бросания правого шара  $\alpha_0$ , массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , длину нити  $l$ , цену деления угломерной шкалы  $C_\alpha$  и цену деления микросекундомера  $C_t$ .

2. Отклоните правый шар до соприкосновения с электромагнитом.

3. Для обнуления микросекундомера нажмите на кнопку СБРОС.

4. Убедившись в том, что левый шар находится в состоянии покоя, нажмите на кнопку ПУСК.

5. После упругого соударения шаров запишите показания микросекундомера в табл. 6.

6. Повторите пп. 2-4 и определите по левой шкале угол отскока левого шара  $\alpha_2$ . Результат запишите в табл. 6.

7. Повторите пп. 2-4 и определите по правой шкале угол отскока правого шара в соответствии с методикой, подробно описанной в экспериментальной части данной лабораторной работы. То есть после соударения шаров рукой поймите и зафиксируйте в отклонённом положении левый шар. По правой шкале измерьте угол максимального отклонения правого шара  $\alpha_{11}$  (рис. 20,а), приблизительно равный искомому углу  $\alpha_1$ . Результат запишите в табл. 6.

8. Измерения по пп. 5-7 проделайте ещё четыре раза.

9. Заполните табл. 6, рассчитав средние значения измеренных величин  $\langle t \rangle$ ,  $\langle \alpha_1 \rangle$ ,  $\langle \alpha_2 \rangle$ , квадраты их отклонений от средних значений и суммы квадратов их отклонений.

Таблица 6

Угол бросания правого шара:  $\alpha_0 =$

Масса правого шара:  $m_1 =$

Масса левого шара:  $m_2 =$

Длина нити подвеса шаров:  $l = 470 \pm 10$  мм

Цена деления угломерной шкалы:  $C_\alpha =$

Цена деления микросекундомера:  $C_t =$

№	$t, \text{ мкс}$	$(\langle t \rangle - t_i)^2$	$\alpha_1, ^\circ$	$(\langle \alpha_1 \rangle - \alpha_{1,i})^2$	$\alpha_2, ^\circ$	$(\langle \alpha_2 \rangle - \alpha_{2,i})^2$
1						
2						
3						
4						
5						
	$\langle t \rangle$	$\sum (\langle t \rangle - t_i)^2$	$\langle \alpha_1 \rangle$	$\sum (\langle \alpha_1 \rangle - \alpha_{1,i})^2$	$\langle \alpha_2 \rangle$	$\sum (\langle \alpha_2 \rangle - \alpha_{2,i})^2$

10. Оцените погрешность прямых измерений времени соударения шаров:

а) рассчитайте величину систематической составляющей погрешности для доверительной вероятности  $P = 0,95$  по формуле

$$\Delta_C = 1,1 \cdot \frac{C_t}{2};$$

б) рассчитайте значение абсолютной погрешности:

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle t \rangle - t_i)^2},$$

где  $t_c = 2,776$  – коэффициент Стьюдента, взятый из таблицы коэффициентов при числе измерений  $n = 5$  и доверительной вероятности  $P = 0,95$ ;

$n = 5$  – число измерений;  $\sum_{i=1}^n (\langle t \rangle - t_i)^2$  – сумма квадратов отклонений времени соударений, взятая из соответствующей графы табл. 6;

в) оцените значение абсолютной погрешности определения времени соударений:

$$\Delta t = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2};$$

г) оцените относительную погрешность как отношение значения абсолютной погрешности к средней величине:

$$\delta_t = \frac{\Delta t}{\langle t \rangle}.$$

11. Аналогично оцените погрешности прямых измерений угла бросания правого шара и углов последующего отскока шаров:

а) рассчитайте величину систематической составляющей погрешности по формуле

$$\Delta_C = 1,1 \cdot \frac{C_\alpha}{2};$$

б) на основе систематической погрешности оцените значение абсолютной и относительной погрешностей угла бросания правого шара:

$$\Delta \alpha_0 = \Delta_C \Rightarrow \delta_{\alpha 0} = \frac{\Delta \alpha_0}{\alpha_0};$$

в) рассчитайте значение абсолютной погрешности угла отскока правого шара:

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle \alpha_1 \rangle - \alpha_{1,i})^2};$$

г) оцените значение абсолютной и относительной погрешностей угла отскока правого шара:

$$\Delta\alpha_1 = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CЛ}^2} \Rightarrow \delta_{\alpha 1} = \frac{\Delta\alpha_1}{\langle\alpha_1\rangle};$$

д) рассчитайте значение абсолютной погрешности угла отскока левого шара:

$$\Delta_{CЛ} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle\alpha_2\rangle - \alpha_{2,i})^2};$$

е) оцените значение абсолютной и относительной погрешностей угла отскока левого шара:

$$\Delta\alpha_2 = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CЛ}^2} \Rightarrow \delta_{\alpha 2} = \frac{\Delta\alpha_2}{\langle\alpha_2\rangle}.$$

12. Запишите полученные результаты в виде:

$$t = \langle t \rangle \pm \Delta t [c], \quad \delta_t = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$\alpha_0 = \alpha_0 \pm \Delta\alpha_0 [град], \quad \delta_{\alpha 0} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 \pm \Delta\alpha_1 [град], \quad \delta_{\alpha 1} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$\alpha_2 = \alpha_2 \pm \Delta\alpha_2 [град], \quad \delta_{\alpha 2} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

13. По формулам (83), (84) и (85) произведите расчёты скоростей шаров до и после удара, приняв ускорение свободного падения  $g$  равным  $9,8145 \text{ м/с}^2$ .

14. Оцените относительные погрешности скоростей шаров:

а) рассчитайте относительную погрешность длины бифилярного подвеса как отношение значения его абсолютной погрешности к его длине

$$\delta_l = \frac{\Delta l}{l}.$$

б) относительные погрешности скоростей шаров  $v_1$ ,  $u_1$  и  $u_2$  оцените на основе соотношения, подставив в него значения относительных погрешностей соответствующих углов:

$$\delta_{v1 \text{ или } u1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\delta_l\right)^2 + \delta_{\alpha i}^2}.$$

**Примечание.** В последнем соотношении значение относительной погрешности синуса половинного угла  $\delta_{\sin(\alpha/2)}$  приравнено к относитель-



ной погрешности самого угла  $\delta_\alpha$  с учётом малости самих углов, максимальное значение которых, делённое пополам, не превышает значения 7,5 градуса. В таком случае

$$\delta_{\sin(\alpha/2)} = \frac{\Delta\alpha}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)} \approx \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \delta_\alpha.$$

15. Помножив относительные погрешности скоростей  $\delta_{v1 \text{ или } u1}$  на их средние значения  $v_1$ ,  $u_1$  и  $u_2$  соответственно, определите абсолютные погрешности скоростей и запишите полученные результаты в виде:

$$v_1 = v_1 \pm \Delta v_1 \text{ [м/с]}, \quad \delta_{v1} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$u_1 = u_1 \pm \Delta u_1 \text{ [м/с]}, \quad \delta_{u1} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$u_2 = u_2 \pm \Delta u_2 \text{ [м/с]}, \quad \delta_{u2} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

16. Найдите импульсы шаров до и после удара, помножив массы соответствующих шаров на их скорости:

$$p_0 = m_1 v_1, \quad p_1 = m_1 u_1, \quad p_2 = m_2 u_2.$$

17. Оцените погрешности определения импульсов:

а) рассчитайте абсолютные систематические и относительные погрешности для масс левого и правого шаров по соотношениям:

$$\Delta m = 1,1 \cdot \frac{C_m}{2} \Rightarrow \delta_{m1} = \frac{\Delta m}{m_1}, \quad \delta_{m2} = \frac{\Delta m}{m_2},$$

где  $C_m = 1 \text{ г}$  – точность в определении массы;

б) оцените относительные погрешности импульсов, подставив значения относительных погрешностей соответствующих масс и скоростей:

$$\delta_{pi} = \sqrt{\delta_{mi}^2 + \delta_{v1 \text{ или } u1}^2};$$

в) оцените абсолютные погрешности определения импульсов шаров, помножив значения соответствующих импульсов на их относительные погрешности:

$$\Delta p_i = p_i \cdot \delta_{pi}.$$

18. Запишите значения импульса правого шара перед ударом и импульсов обоих шаров после удара в виде:

$$p_0 = p_0 \pm \Delta p_0 \text{ [кг} \cdot \text{м/с]}, \quad \delta_{p0} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$p_1 = p_1 \pm \Delta p_1 \text{ [кг} \cdot \text{м/с]}, \quad \delta_{p1} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$p_2 = p_2 \pm \Delta p_2 \text{ [кг} \cdot \text{м/с]}, \quad \delta_{p2} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

19. Произведите проверку закона сохранения импульса. Для этого сложите модули импульсов шаров после удара  $p = p_1 + p_2$ , оцените абсолютную погрешность суммарного импульса  $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$  и запишите полученные данные в виде  $p_0 = p_0 \pm \Delta p_0 \text{ [кг} \cdot \text{м/с]}$

Импульс системы до удара	$p_0 = p_0 \pm \Delta p_0 \text{ [кг} \cdot \text{м/с]}$
Импульс системы после удара	$p = p \pm \Delta p \text{ [кг} \cdot \text{м/с]}$

Сформулируйте и запишите вывод о выполнении закона сохранения импульса.

20. По формулам (66), (72) и (71) произведите расчёты средней силы удара для первого  $F_1$  и второго шаров  $F_2$ , коэффициента восстановления скорости  $K_C$  и изменения кинетической энергии  $\Delta E_k$  с учётом того, что скорость левого шара перед ударом равна 0 ( $v_2 = 0$ ).

21. Оцените погрешности найденных величин:

а) рассчитайте относительные погрешности по соотношениям

$$\delta_{F1} = \sqrt{\delta_{m1}^2 + \delta_t^2 + \left( \frac{\Delta u_1 + \Delta v_1}{v_1 - u_1} \right)^2},$$

$$\delta_{F2} = \sqrt{\delta_{m2}^2 + \delta_t^2 + \left( \frac{\Delta u_2 + \Delta v_2}{v_2 - u_2} \right)^2},$$

$$\delta_{K_C} = \sqrt{\left( \frac{\Delta u_2 + \Delta u_1}{u_2 - u_1} \right)^2 + (\delta_{v1})^2},$$

$$\delta_{\Delta E_k} = \sqrt{\left( \frac{\Delta m_1/m_1^2 + \Delta m_2/m_2^2}{1/m_1 + 1/m_2} \right)^2 + (2\delta_{v1})^2 + \left( \frac{2\Delta K_C}{K_C(1 - K_C^2)} \right)^2};$$

б) помножив значения соответствующих величин на их относительные погрешности, определите абсолютные погрешности

$$\Delta F_1 = F_1 \cdot \delta_{F1}, \quad \Delta F_2 = F_2 \cdot \delta_{F2}, \quad \Delta K_C = K_C \cdot \delta_{K_C}, \quad \Delta(\Delta E_k) = \Delta E_k \cdot \delta_{\Delta E_k}.$$

22. Запишите полученные результаты в виде

$$F_1 = F_1 \pm \Delta F_1 \text{ [Н]}, \quad \delta_{F1} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$F_2 = F_2 \pm \Delta F_2 \text{ [Н]}, \quad \delta_{F2} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$K_C = K_C \pm \Delta K_C, \quad \delta_{K_C} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$\Delta E_k = \Delta E_k \pm \Delta(\Delta E_k) \text{ [Дж]}, \quad \delta_{\Delta E_k} = \dots\%, \quad P = 0,95$$

23. Сравните значения полученных сил  $F_1$  и  $F_2$ , сформулируйте и запишите вывод о выполнении *III* закона Ньютона.

24. Наденьте на металлические шары накладки для неупругого удара.

25. Не изменяя значение угла бросания правого шара  $\alpha_0$ , повторите пп. 1-3 и определите угол отскока левого шара  $\alpha$  (при столкновении шары должны прилипнуть друг к другу в соответствии с рис. 20,б).

26. Измерения сделайте пять раз. Результаты измерений занесите в табл. 7.

Таблица 7

№	1	2	3	4	5	$\langle \alpha \rangle$
$\alpha$						
$(\langle \alpha \rangle - \alpha_i)^2$						
$\sum (\langle \alpha \rangle - \alpha_i)^2$						

27. Заполните табл. 7, рассчитав среднее значение угла  $\langle \alpha \rangle$ , квадраты его отклонений от среднего значения  $(\langle \alpha \rangle - \alpha_i)^2$  и сумму квадратов отклонений  $\sum (\langle \alpha \rangle - \alpha_i)^2$ .

28. Оцените погрешность прямого измерения угла  $\alpha$

а) рассчитайте значение случайной составляющей погрешности по формуле

$$\Delta_{сл} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle \alpha \rangle - \alpha_i)^2},$$

где  $n = 5$  – число измерений;  $\sum (\langle \alpha \rangle - \alpha_i)^2$  – сумма квадратов отклонений угла, взятая из табл. 7;  $t_c = 2,776$  – коэффициент Стьюдента, взятый из таблицы коэффициентов при числе измерений  $n = 5$  и доверительной вероятности  $P = 0,95$ ;

б) взяв из пункта 10,а значение систематической составляющей  $\Delta_C$  углов, оцените значение абсолютной и относительной погрешности угла  $\alpha$  по соотношениям:

$$\Delta \alpha = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{сл}^2} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{\Delta \alpha}{\langle \alpha \rangle};$$

в) запишите полученный результат в виде

$$\alpha = \langle \alpha \rangle \pm \Delta\alpha [\text{град}], \quad \delta_\alpha = \dots\%, \quad P = 0,95$$

29. По формуле (86) произведите расчёт общей скорости шаров  $u$  после неупругого удара, взяв ускорение свободного падения  $g$  равным  $9,8145 \text{ м/с}^2$ .

30. Оцените относительную погрешность скорости шаров  $u$  на основе соотношения, взятого из пункта 14,б:

$$\delta_u = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\delta_l\right)^2 + \delta_\alpha^2},$$

где  $\delta_l$  – относительная систематическая погрешность длины бифилярного подвеса, рассчитываемая в пункте 14,а.

31. Умножив относительную погрешность скорости на её значение, определите абсолютную погрешность скорости  $\Delta u = u \cdot \delta_u$  и запишите полученный результат в виде:

$$u = u \pm \Delta u [\text{м/с}], \quad \delta_u = \dots\%, \quad P = 0,95$$

32. Найдите импульс шаров после неупругого удара:

$$p = (m_1 + m_2)u.$$

33. Оцените погрешность определения импульса:

а) с учётом данных, полученных в пункте 16а, оцените относительную погрешность импульса по соотношению

$$\delta_p = \sqrt{\left(\frac{2\Delta m}{m_1 + m_2}\right)^2 + \delta_u^2};$$

б) оцените абсолютную погрешность определения импульса шаров помножив значение импульса на его относительную погрешность

$$\Delta p = p \cdot \delta_p.$$

34. Запишите значение импульса шаров после неупругого соударения в виде

$$p = p \pm \Delta p [\text{кг} \cdot \text{м/с}], \quad \delta_p = \dots\%, \quad P = 0,95$$

35. Произведите сравнение значений импульса правого шара до удара  $p_0$ , указанное в пункте 18, и суммарного импульса шаров после неупругого соударения, представив эти данные в виде таблицы

Импульс системы до удара	$p_0 = p_0 \pm \Delta p_0 [\text{кг} \cdot \text{м/с}]$
Импульс системы после удара	$p = p \pm \Delta p [\text{кг} \cdot \text{м/с}]$

Сформулируйте и запишите вывод о выполнении закона сохранения импульса.

36. Взяв значение скорости правого шара  $v_1$  до удара из пункта 14 и скорости шаров после удара  $u$  из пункта 31, по формулам (77) и (78) произведите расчёт «потерь» кинетической энергии  $\Delta E_k$  при неупругом соударении шаров.

37. Оцените погрешность «потери» кинетической энергии, полученной по формуле (77):

а) найдите значения частных производных  $\Delta E_k$ :

по массе правого шара:  $\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial m_1} = \frac{v_1^2 - u^2}{2},$

по массе левого шара:  $\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial m_2} = -\frac{u^2}{2},$

по скорости правого шара перед ударом:  $\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial v_1} = m_1 v_1,$

по скорости шаров после удара:  $\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial u} = -(m_1 + m_2)u;$

б) рассчитайте значение абсолютной погрешности  $\Delta E_k$ , подставив полученные значения производных и абсолютные погрешности соответствующих величин в соотношение:

$$\Delta(\Delta E_k) = \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial m_1} \Delta m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial m_2} \Delta m_2\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial v_1} \Delta v_1\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta E_k)}{\partial u} \Delta u\right)^2};$$

в) поделив абсолютную погрешность  $\Delta E_k$  на её значение, определите относительную погрешность:

$$\delta_{\Delta E_k} = \frac{\Delta(\Delta E_k)}{\Delta E_k}. \delta_{\Delta E_k} = \frac{\Delta(\Delta E_k)}{\Delta E_k}.$$

38. Оцените погрешность «потери» кинетической энергии, полученной по формуле (78):

а) рассчитайте относительную погрешность  $\Delta E_k$ :

$$\delta_{\Delta E_k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1/m_1^2 + \Delta m_2/m_2^2}{1/m_1 + 1/m_2}\right)^2 + (2\delta_{v_1})^2};$$

б) помножив значение  $\Delta E_k$  на относительную погрешность, найдите абсолютную погрешность  $\Delta E_k$ :

$$\Delta(\Delta E_k) = \Delta E_k \cdot \delta_{\Delta E_k}.$$

39. Запишите полученные по формулам (77) и (78) «потери» кинетической энергии в виде:

Соотношение (77):  $\Delta E_k = \Delta E_k \pm \Delta(\Delta E_k) \text{ (Дж)}, \delta_{\Delta E_k} = \dots\%, P = 0,95$

Соотношение (78):  $\Delta E_k = \Delta E_k \pm \Delta(\Delta E_k) \text{ (Дж)}, \delta_{\Delta E_k} = \dots\%, P = 0,95$

Сопоставьте полученные результаты и отразите это в выводе.

40. Сформулируйте и запишите итоговый вывод о проделанной работе, отразив в нем все практически полученные результаты.

### ***Вопросы и задания для самоконтроля***

1. Какое взаимодействие тел называется ударом? Какие существуют виды ударного взаимодействия?

2. Сформулируйте законы сохранения импульса и энергии и примените их к ударам различного вида.

3. Что такое прямой центральный удар? Дайте определение.

4. Рассчитайте скорости тел, испытавших прямой центральный удар при абсолютно упругом взаимодействии.

5. Найдите «потерю» кинетической энергии двух тел, испытавших прямой центральный удар при абсолютно неупругом взаимодействии.

6. Что такое коэффициент восстановления скорости? Как определить коэффициент восстановления кинетической энергии?

## *Лабораторная работа 1-21*

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

**Цель работы:** изучение законов сохранения момента импульса и энергии при неупругом соударении и определение скорости полёта пули.

**Приборы и принадлежности:** лабораторная установка ФПМ-9.

#### *Элементы теории и метод эксперимента*

В данной работе с помощью крутильного баллистического маятника производится определение скорости полёта пули. Пуля и маятник считаются абсолютно твёрдыми телами. *Абсолютно твёрдым* называется тело, которое в условиях данной задачи не деформируется, т.е. расстояние между любыми его точками не изменяется. Пуля, попадая в мишень маятника, застревает в ней и заставляет маятник совершать крутильные колебания. Измеряя период колебаний маятника и угол максимального отклонения, можно определить скорость полёта пули.

Общий вид маятника представлен на рис. 22. Он выполнен в форме горизонтальной крестовины с мишенью, закреплённой на тонкой вертикальной проволоке. До удара пули в мишень на маятник действуют внешние силы: сила натяжения проволоки подвеса и сила тяжести. Эти силы уравновешены, и момент их относительно оси вращения равен нулю, так как линия действия этих сил совпадает с осью вращения. После удара пули в мишень маятник поворачивается вокруг оси вращения и при этом закручивает проволоку. При деформации кручения проволоки подвеса на маятник действует момент сил со стороны проволоки относительно оси вращения. При упругих деформациях кручения проволоки этот момент можно определить согласно закону Гука по формуле

$$M = k\varphi, \quad (87)$$

где  $\varphi$  – угол закручивания проволоки, равный углу поворота маятника;  $k$  – коэффициент упругости проволоки.

Пуля массой  $m$  неупруго ударяется о мишень на расстоянии  $r$  от оси вращения. Так как время удара пули о мишень пренебрежимо мало, то можно пренебречь действием момента сил, возникающего в процессе удара со стороны проволоки подвеса, и считать систему "пуля-маятник" замкнутой. Следовательно, для этой системы можно применить законы

сохранения.

Закон сохранения момента импульса имеет вид

$$mvr = (I + mr^2)\omega, \quad (88)$$

где  $r$  – расстояние от оси вращения до точки попадания пули;  $mvr$  – момент импульса пули относительно оси вращения в момент взаимодействия её с мишенью маятника;  $(I + mr^2)$  – момент инерции маятника и пули относительно оси вращения;  $v$  – скорость полёта пули до удара;  $\omega$  – угловая скорость вращения маятника в момент, когда пуля прекратила своё движение относительно маятника.

Закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(I + mr^2)\omega^2}{2} + \Delta U, \quad (89)$$

где  $\Delta U$  – часть механической энергии, потерянной в результате неупругого соударения пули и мишени маятника.

После удара систему "пуля-маятник" нельзя считать замкнутой, так как на маятник при его вращении начинает действовать момент силы со стороны проволоки, которым нельзя пренебрегать. Но поскольку после удара маятник взаимодействует только с проволокой подвеса, а кинетическая энергия маятника полностью превращается в потенциальную энергию упруго деформированной проволоки, то систему "маятник – пуля – проволока" также можно считать замкнутой и для неё записать закон сохранения в виде

$$\frac{(I + mr^2)\omega^2}{2} = \frac{k\varphi^2}{2}. \quad (90)$$

Из уравнения (90) выражаем угловую скорость

$$\omega = \varphi \sqrt{\frac{k}{I + mr^2}}.$$

Полученную формулу подставляем в (88) и находим скорость полёта пули

$$v = \frac{\varphi \sqrt{(I + mr^2)k}}{mr}. \quad (91)$$

С учётом  $mr^2 \ll I$  соотношение (91) записываем в виде

$$v = \frac{\varphi I \sqrt{k/I}}{mr}. \quad (92)$$



Период колебаний крутильного баллистического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{I/k}.$$

С учётом этого получаем окончательную формулу для расчёта скорости пули:

$$v = \frac{2\pi\varphi I}{mrT}, \quad (93)$$

где  $I$  – момент инерции маятника;  $\varphi$  – максимальный угол поворота маятника после попадания пули, выраженный в радианах;  $T$  – период колебаний маятника;  $r$  – расстояние от оси вращения маятника до центра пули, застрявшей в мишени;  $m$  – масса пули.

### **Описание экспериментальной установки**

Принцип действия маятника основан на зависимости числа колебаний маятника и угла его отклонения от упругих свойств проволоки подвеса и скорости полёта пули. Маятник представляет собой настольный прибор (рис. 22).

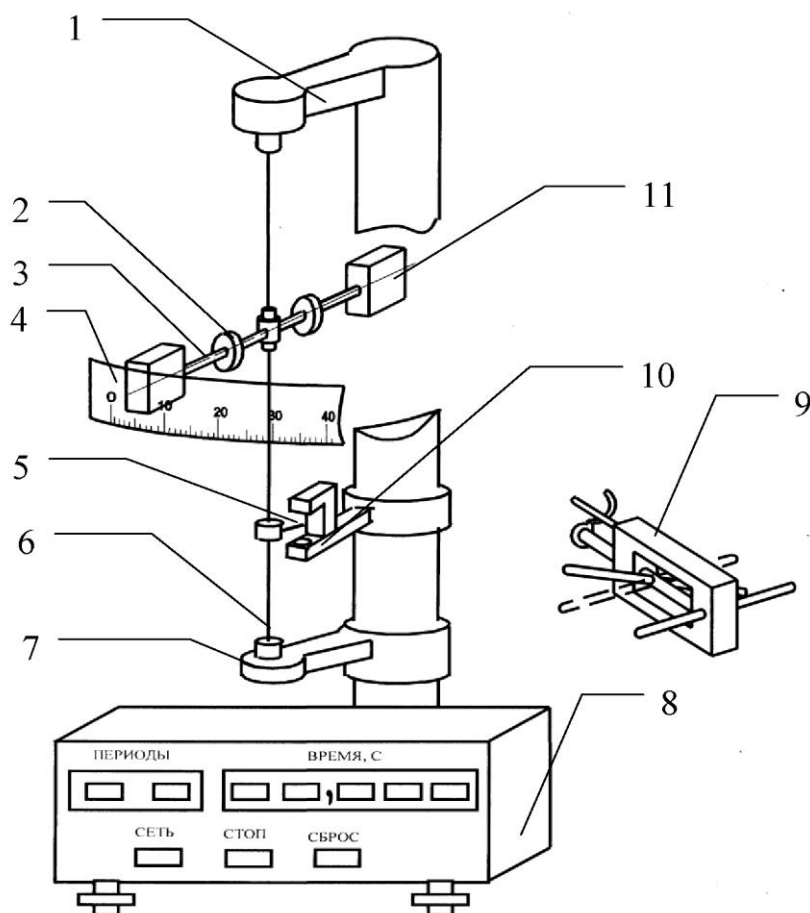


Рис. 22

На вертикальной стойке крепятся два кронштейна 1 и 7. Между верхним и нижним кронштейнами на стальной проволоке 6 закреплён подвес 3, представляющий собой стальной стержень, по которому в горизонтальном направлении перемещаются два груза 2 равной массы. На концах стержня находятся мишени со шкалами 11.

Между верхним и нижним кронштейнами расположен третий кронштейн, на котором крепится пусковое устройство 9, предназначенное для запуска пули.

Край пускового устройства и подвес закрыты прозрачным кожухом 4, на внутренней стороне которого нанесена шкала, предназначенная для определения угла отклонения маятника после выстрела.

Фотоэлектрический датчик 10, расположенный снизу подвеса, вырабатывает электрический сигнал, поступающий на миллисекундомер 8, который измеряет время и подсчитывает количество колебаний подвеса. После того как будет произведён выстрел и пуля застрянет в мишени подвеса, маятник начнёт совершать крутильные колебания. Одновременно с подвесом совершает колебания и стержень 5, закреплённый на проволоке. Во время колебания он пересекает световой поток в фотоэлектрическом датчике, после чего сигнал с датчика поступает на миллисекундомер.

### ***Порядок выполнения работы***

1. Включите миллисекундомер нажав кнопку СЕТЬ на лицевой панели прибора, и дайте ему прогреться в течение 2-3 минут.

2. Установите грузы на маятнике на расстояние, предварительно указанное преподавателем, и зафиксируйте их положение винтами. По табл. 8 определите значение момента инерции маятника и запишите его в отчёт.

3. Определите цену деления шкалы определения угла отклонения маятника после выстрела  $C_\phi$ , цену деления шкалы мишени  $C_r$  и цену деления шкалы миллисекундомера  $C_t$ . Запишите эти данные в табл. 9.

4. Для того чтобы пуля при попадании в мишень застревала в ней, размягчите находящийся на мишени пластилин.

5. Поместите пулю в пусковое устройство.

6. Убедившись, что маятник покоится, произведите выстрел, для чего после взвода пускового устройства одну из подвижных ручек опустите вниз по часовой стрелке.

Таблица 8

Расстояние от оси вращения до центра масс грузов, $r$ , см	Момент инерции маятника, $I$ , кг·м <sup>2</sup> , ×10 <sup>-3</sup>
2	0,91
3	0,94
4	1,12
5	1,13
6	1,43
7	1,52
8	1,61
9	1,65

7. После попадания пули в мишень определите максимальный угол отклонения маятника  $\varphi$  и запишите полученное значение в табл. 9.

8. Отклоните маятник на угол  $\varphi$ , определённый по п.7, и нажмите кнопку СБРОС миллисекундомера. Отпустите маятник. После того как счётчик отсчитает девять колебаний, нажмите на кнопку СТОП. Миллисекундомер отсчитает десятое колебание и автоматически остановится.

9. Запишите отображаемое на экране миллисекундомера время  $t$  реализации десяти полных колебаний маятника в табл. 9.

Таблица 9

Момент инерции маятника:  $I =$

Цена деления шкалы измерения углов:  $C_\varphi =$

Цена деления шкалы мишени:  $C_r =$

Цена деления миллисекундомера:  $C_t =$

№ п/п	$r$ , мм	$(\langle r \rangle - r_i)^2$	$\varphi$ , град	$(\langle \varphi \rangle - \varphi_i)^2$	$t$ , с	$(\langle t \rangle - t_i)^2$
1						
2						
...						
10						
	$\langle r \rangle$	$\sum (\langle t \rangle - t_i)^2$	$\langle \varphi \rangle$	$\sum (\langle \varphi \rangle - \varphi_i)^2$	$\langle t \rangle$	$\sum (\langle t \rangle - t_i)^2$

10. Измерьте расстояние  $r$  от оси вращения до центра попадания пули, используя шкалу, нанесённую на мишени. Число  $120^\circ$  над шкалой означает расстояние от оси вращения в миллиметрах. Запишите это расстояние в табл. 9.

11. Повторите пункты 5-10, произведя не менее 10 выстрелов в мишень.

12. Заполните табл. 9, рассчитав средние значения измеренных величин  $\langle r \rangle$ ,  $\langle \phi \rangle$ ,  $\langle t \rangle$ , квадраты их отклонений от средних значений и суммы квадратов их отклонений.

13. Найдите погрешность прямого измерения расстояния  $r$ :

а) рассчитайте систематическую составляющую погрешности измерения для доверительной вероятности  $P=0,95$  по формуле

$$\Delta_C = 1,1 \cdot \frac{C_r}{2},$$

где  $C_r$  – цена деления шкалы мишени;

б) рассчитайте случайную составляющую погрешности определения расстояния

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle r \rangle - r_i)^2},$$

где  $n = 10$  – число измерений;  $\sum_{i=1}^n (\langle r \rangle - r_i)^2$  – сумма квадратов отклонений из табл. 9;  $t_c = 2,262$  – коэффициент Стьюдента, взятый из таблицы коэффициентов при числе измерений  $n = 10$  и доверительной вероятности  $P = 0,95$ ;

в) оцените значение абсолютной погрешности расстояния как корень квадратный из суммы квадратов его систематической и случайной составляющих:

$$\Delta r = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2};$$

г) оцените относительную погрешность как отношение значения абсолютной погрешности расстояния к его среднему значению:

$$\delta_r = \frac{\Delta r}{\langle r \rangle}.$$

14. Найдите погрешность прямого измерения угла отклонения маятника  $\varphi$ :

а) рассчитайте систематическую составляющую погрешности измерения для доверительной вероятности  $P=0,95$  по формуле

$$\Delta_C = 1,1 \cdot \frac{C_\varphi}{2},$$

где  $C_\varphi$  – цена деления шкалы измерения углов;

б) рассчитайте случайную составляющую погрешности определения угла отклонения маятника

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle \varphi \rangle - \varphi_i)^2},$$

где  $n = 10$  – число измерений;  $\sum_{i=1}^n (\langle \varphi \rangle - \varphi_i)^2$  – сумма квадратов отклонений

из табл. 9;  $t_c = 2,262$  – коэффициент Стьюдента;

в) оцените значение абсолютной погрешности угла отклонения маятника

$$\Delta\varphi = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2};$$

г) оцените относительную погрешность

$$\delta_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\langle \varphi \rangle}.$$

15. Найдите погрешность прямого измерения времени колебаний маятника  $t$ :

а) рассчитайте систематическую составляющую погрешности измерения для доверительной вероятности  $P=0,95$  по формуле

$$\Delta_C = 1,1 \cdot \frac{C_t}{2},$$

где  $C_t$  – цена деления миллисекундомера;

б) рассчитайте случайную составляющую погрешности определения времени колебаний маятника

$$\Delta_{CL} = t_c \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\langle t \rangle - t_i)^2},$$

где  $n = 10$  – число измерений;  $\sum_{i=1}^n (\langle t \rangle - t_i)^2$  – сумма квадратов отклонений

из табл. 9;  $t_c = 2,262$  – коэффициент Стьюдента;

в) оцените значение абсолютной погрешности времени колебаний маятника

$$\Delta t = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_{CL}^2};$$

г) оцените относительную погрешность

$$\delta_t = \frac{\Delta t}{\langle t \rangle}.$$

16. Запишите полученные результаты в виде:

$$r = \langle r \rangle \pm \Delta r [\text{мм}], \quad \delta_r = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$\varphi = \langle \varphi \rangle \pm \Delta \varphi [\text{град}], \quad \delta_\varphi = \dots\%, \quad P = 0,95$$

$$t = \langle t \rangle \pm \Delta t [\text{с}], \quad \delta_t = \dots\%, \quad P = 0,95$$

17. Определите средний период колебаний маятника и его абсолютную погрешность по формулам:

$$T = \frac{\langle t \rangle}{N}, \quad \Delta T = \frac{\Delta t}{N}, \quad \delta_T = \delta_t,$$

где  $N = 10$  – число колебаний.

18. Запишите результат в виде:

$$T = T \pm \Delta T [\text{с}], \quad \delta_T = \dots\%, \quad P = 0,95$$

19. Вычислите среднюю скорость полёта пули  $v$  по формуле (93), приняв массу  $m$  пули равной  $2,0 \pm 0,1$  г.

20. Оцените относительные погрешности массы пули  $\delta_m$  и момента инерции системы  $\delta_I$  как отношение указанных значений абсолютных погрешностей к их величинам:

$$\delta_m = \frac{\Delta m}{m}, \quad \delta_I = \frac{\Delta I}{I}.$$

21. Оцените относительную и абсолютную погрешности определения скорости пули  $v$  по формулам:

$$\delta_v = \sqrt{\delta_r^2 + \delta_T^2 + \delta_\varphi^2 + \delta_m^2 + \delta_I^2}, \quad \Delta v = v \cdot \delta_v.$$

22. Сделайте вывод о проделанной работе с указанием полученного результата, записанного в виде  $v = v \pm \Delta v [\text{м/с}], \quad \delta_v = \dots\%, \quad P = 0,95$ .

***Вопросы и задания для самоконтроля***

1. Запишите основное уравнение динамики вращательного движения.
2. Дайте определение момента инерции точки относительно оси вращения.
3. Дайте определение момента силы относительно точки и оси вращения.
4. Дайте определение момента импульса относительно точки и оси вращения.
5. Выведите формулу для кинетической энергии вращающегося тела.
6. Сформулируйте закон сохранения момента импульса и обоснуйте применимость закона сохранения момента импульса в данной работе.
7. Выведите рабочую формулу (93) для расчёта скорости пули.

***Библиографический список***

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика: учеб. пособие / И.В. Савельев. – 15-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2019. – 436 с.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы: учеб. пособие / И.Е. Иродов. – 16-е изд. – М.: Лаборатория знаний, 2023. – 309 с.
3. Детлаф А.А. Курс физики: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 9-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 720 с.
4. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т.И. Трофимова. – 20-е изд., стер. – М.: Академия, 2014. – 560 с.



## *Оглавление*

1. Элементы теории. Законы сохранения .....	3
1.1. Введение .....	3
1.2. Законы изменения и сохранения импульса .....	4
1.3. Реактивное движение .....	8
1.4. Законы изменения и сохранения момента импульса .....	10
1.5. Работа силы и мощность .....	14
1.6. Консервативные и диссипативные силы .....	16
1.7. Энергия .....	18
1.7.1. Кинетическая энергия поступательного движения .....	19
1.7.2. Кинетическая энергия вращательного движения .....	20
1.7.3. Связь силы и потенциальной энергии .....	21
1.7.4. Потенциальная энергия тела в поле силы гравитационного взаимодействия .....	23
1.7.5. Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести .....	24
1.7.6. Потенциальная энергия упруго деформированного тела .....	25
1.8. Закон изменения и сохранения полной механической энергии .....	25
1.9. Примеры использования законов изменения и сохранения импульса и полной механической энергии .....	26
1.9.1. Прямой центральный абсолютно неупругий удар .....	26
1.9.2. Прямой центральный абсолютно упругий удар .....	29
1.9.3. Центральный абсолютно неупругий удар под углом .....	32
1.9.4. Нецентральное абсолютно упругое соударение двух шаров, один из которых покоился .....	34
2. Лабораторный практикум .....	37
Лабораторная работа 1-17. Определение моментов инерции тел с помощью маятника Максвелла .....	37
Лабораторная работа 1-18. Изучение упругого и неупругого ударов шаров .....	50
Лабораторная работа 1-21. Определение скорости пули с помощью крутильного баллистического маятника .....	70
Библиографический список .....	79